MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Prof. Dr. Günther Kraus

ÜBUNGEN ZUM STAATSEXAMEN (ALGEBRA)
Wintersemester 2006/07

Blatt 3

Zahlentheorie

18. (Frühjahr 2004, Thema 2)

Aufgabe 2:

Der Ring $R = \{n + m\sqrt{-2};\ n, m \in \mathbb{Z}\}$ ist bekanntlich ein euklidischer Ring bezüglich der Norm $\mathrm{N}(n + m\sqrt{-2}) = n^2 + 2m^2$.

a) Zeigen Sie, dass 11 ein zerlegbares und 13 ein unzerlegbares Element in R ist.
b) Zeigen Sie, dass der Restklassenring $R/13R$ ein Körper ist. Aus wie viel Elementen besteht er?
c) Verwenden Sie den Chinesischen Restsatz, um den Restklassenring $R/11R$ als direktes Produkt von zwei Körpern darzustellen.

19. (Frühjahr 2006, Thema 2)

Aufgabe 2:
Für welche Primzahlen $p = 10n + k$ $(n \geq 0, k \in \{1, 3, 7, 9\})$ ist 5 ein quadratischer Rest und für welche ein quadratischer Nichtrest?

(5 Punkte)

20. (Frühjahr 2006, Thema 3)

Aufgabe 1:
Gegeben sei eine natürliche Zahl m. Beweisen Sie:

a) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $m|\varphi(n)$. (φ bezeichnet die Eulersche Phi-Funktion.)
b) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, die in ihrer Dezimaldarstellung nur aus Nullen und Einsen bestehen und Vielfache von m sind.

(5 Punkte)

21. (Frühjahr 2005, Thema 1)

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Beweisen oder widerlegen Sie: Eine natürliche Zahl der Gestalt $4n + 3$ mit $n \in \mathbb{N}$ besitzt keine Darstellung als Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen.

22. (Frühjahr 2005, Thema 3)

Aufgabe 3 (7 Punkte):

Geben Sie explizit einen Ring-Isomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z}/1000\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$$

und seine Umkehrung φ^{-1} an.

23. (Frühjahr 2005, Thema 3)

<u>Aufgabe 4</u> (6 Punkte):

Hat die Gleichung

$$x^2 + 91y = 5$$

eine ganzzahlige Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort.

24. (Herbst 2005, Thema 1)

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

a) $\sqrt{35}$ ist irrational.

b) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

c) Für unendlich viele ganze Zahlen n sind die beiden Zahlen $77n + 1$ und $143n + 2$ nicht teilerfremd.

Ideale, Moduln

25. (Frühjahr 2005, Thema 1)

<u>Aufgabe 2</u> (6 Punkte):

Sei R ein Integritätsring. Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in R definiert man

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} :\Leftrightarrow \quad \text{Es gibt } \alpha, \beta \in R \setminus \{0\} \text{ mit } \alpha \cdot \mathfrak{a} = \beta \cdot \mathfrak{b}.$$

Zeigen Sie:

a) Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, und es gilt

$$\mathfrak{a}_1 \sim \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_2 \sim \mathfrak{b}_2 \Rightarrow \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \sim \mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2$$

b) Genau dann gilt $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als R-Moduln isomorph sind.

26. (Frühjahr 2005, Thema 2)

<u>Aufgabe 3</u> (5 Punkte):

Seien R und S Ringe (mit 1). Zeigen Sie, dass die (zweiseitigen) Ideale des direkten Produktes $R \times S$ die Form $I \times J$ haben mit Idealen I bzw. J von R bzw. S.

27. (Frühjahr 2004, Thema 3)

Aufgabe 4:

Für ein reelles Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ bezeichne f' die Ableitung. Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ verschiedene reelle Zahlen, und sei I die Menge aller Polynome $f \in \mathbb{R}[x]$ mit

$$f(a_i) = f'(a_i) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie:

a) I ist ein Ideal im Polynomring $\mathbb{R}[x]$.

b) I wird erzeugt von dem Polynom $\prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^2$.

c) Wie viele Ideale besitzt der Faktorring $\mathbb{R}[x]/I$?