MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Prof. Dr. Günther Kraus

ÜBUNGEN ZUM STAATSEXAMEN (ALGEBRA)
Wintersemester 2006/07

Blatt 2

Körpertheorie

9. (Frühjahr 2006, Thema 2)

Aufgabe 3:
Zeigen Sie:

a) Die additive Gruppe der reellen Zahlen ist isomorph zur multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen.

b) Die additive Gruppe eines Körpers ist nie isomorph zur multiplikativen Gruppe dieses Körpers.

(5 Punkte)

10. (Frühjahr 2005, Thema 3)

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Zeigen Sie: Jede endliche Körperweiterung L über K ist algebraisch.

Ringtheorie/Zahlentheorie

11. (Frühjahr 2005, Thema 1)

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von $26+13i$ und $14-5i$ im Ring $\mathbb{Z}[i]$ der Gaußschen ganzen Zahlen.

12. (Herbst 2005, Thema 3)

Aufgabe 2 (9 Punkte):

Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung

$$N:\ R \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad , \quad a + b\sqrt{2} \mapsto |a^2 - 2b^2|$$

ist multiplikativ.

b) R ist ein euklidischer Ring bezüglich N.

c) Ein Element $r \in R$ ist genau dann eine Einheit, wenn $N(r) = 1$ ist.

d) R besitzt unendlich viele Einheiten.

e) Zerlegen Sie das Element 21 in R in Primfaktoren.

Ringtheorie/Ideale

13. (Frühjahr 2006,Thema 2)

Aufgabe 6:
Es sei R ein kommutativer Ring mit 1. Es sei M ein maximales Ideal von R.

a) Sei $1+a$ invertierbar für jedes Element $a \in M$. Zeigen Sie, dass M das einzige maximale Ideal von R ist.

b) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ der Faktorring R/M^n nur ein einziges maximales Ideal hat. (5 Punkte)

Ringtheorie/Polynome

14. (Frühjahr 2006, Thema 1)

Aufgabe 4:
Sei R der Restklassenring $\mathbb{Z}/2006\mathbb{Z}$.

a) Wie viele Nullstellen hat das Polynom $X^2 - 1$ in R?

b) Wie viele Nullstellen hat das Polynom $X^3 - 1$ in R?

(7 Punkte)

15. (Frühjahr 2006, Thema 3)

Aufgabe 4:
R sei ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K, und $x \in K$ sei Nullstelle eines normierten Polynoms aus $R[X]$. Zeigen Sie: $x \in R$. (5 Punkte)

Galoistheorie

16. (Frühjahr 2006, Thema 3)

Aufgabe 5:
Ist $K|\mathbb{Q}$ Galoiserweiterung vom Grad 4 mit zyklischer Galoisgruppe, so hat das Polynom $X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ keine Nullstelle in K. (5 Punkte)

17. (Frühjahr 2006, Thema 3)

Aufgabe 6:
Sind $L|K$ und $M|L$ endliche Körpererweiterungen und ist $M|K$ galoissch mit Galoisgruppe G, so ist auch der Körper

$$K\Big(\bigcup_{\sigma \in G} \sigma(L)\Big)$$

galoissch über K. (5 Punkte)