MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Prof. Dr. Günther Kraus

ÜBUNGEN ZUM STAATSEXAMEN (ALGEBRA)
Wintersemester 2006/07

Blatt 1

Aufgaben zur Gruppentheorie

1. (Frühjahr 2004, Thema 1)

Aufgabe 1:

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n, sei $n = a \cdot b$ eine Zerlegung in teilerfremde Faktoren $a, b > 1$. Zeigen Sie:

a) Es gibt einen minimalen Normalteiler N in G mit zu b teilerfremdem Index $[G : N]$.
b) Der Normalteiler in a) ist die von der Teilmenge $\{g^a;\ g \in G\}$ erzeugte Untergruppe von G.
c) Es gibt eine endliche Gruppe H und einen Homomorphismus $u : G \to H$ mit den folgenden Eigenschaften:
   i. Die Ordnung von H ist teilerfremd zu b.
   ii. Jeder Gruppenhomomorphismus $f : G \to A$ in eine endliche Gruppe A mit zu b teilerfremder Ordnung faktorisiert eindeutig über u, d.h. ist von der Gestalt $f = h \circ u$ mit einem wohlbestimmten Homomorphismus $h : H \to A$.

2. (Frühjahr 2004, Thema 2)

Aufgabe 1:

Geben Sie eine Untergruppe der Ordnung 21 in der symmetrischen Gruppe S_7 an.

3. (Frühjahr 2004, Thema 3)

Aufgabe 3:

Die Diedergruppe D_6, also die Symmetriegruppe des regulären Sechsecks, und die alternierende Gruppe A_4 haben beide 12 Elemente.

a) Zeigen Sie, dass die Gruppen D_6 und A_4 nicht isomorph sind.

b) Geben Sie eine weitere nichtabelsche Gruppe der Ordnung 12 an, die zu den beiden genannten Gruppen nicht isomorph ist.

4. (Herbst 2004, Thema 1)

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie je eine 2-Sylowgruppe in

a) der symmetrischen Gruppe S_4,

b) der alternierenden Gruppe A_5,

c) der alternierenden Gruppe A_6.

5. (Herbst 2004, Thema 2)

Aufgabe 1:

Seien p, q Primzahlen mit $p < q$. Zeigen Sie:

a) Im Fall $p \nmid (q-1)$ ist jede Gruppe der Ordnung pq abelsch.

b) Jede abelsche Gruppe der Ordnung pq ist zyklisch.

c) Im Fall $p \mid (q-1)$ gibt es eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung pq.

6. (Herbst 2004, Thema 3)

Aufgabe 1:

Sei G eine Gruppe der Ordnung p^2q, wobei p und q Primzahlen bezeichnen. Zeigen Sie, dass G einen nichttrivialen Normalteiler hat.

7. (Herbst 2003, Thema 1)

Aufgabe 1:

Sei G eine Gruppe der Ordnung n. Zeigen Sie:
a) G ist isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n.
b) Ist $n = 2u$ mit ungeradem u, so hat G einen Normalteiler vom Index 2.

8. (Herbst 2003, Thema 2)

Aufgabe 1:

a) Definieren Sie die alternierende Gruppe A_n.
b) Warum ist A_n für $n \geq 2$ eine Untergruppe vom Index 2 in S_n?
c) Zeigen Sie, dass die Gruppe S_4 auflösbar ist.