
Prüfungsteilnehmer

Prüfungstermin

Einzelprüfungsnummer

Kennzahl: _____

Kennwort: _____

Arbeitsplatz-Nr.: _____

Frühjahr
2006

63911

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 6

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom. Die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$ habe ungerade Ordnung. Man zeige, dass f nur reelle Nullstellen hat.

(7 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $f(X, Y) = X^{17} + Y^{41}(X^3 + X + 1) - Y \in \mathbb{C}[X, Y]$.

- a) Man zeige, dass f als Polynom in X über dem Koeffizientenring $\mathbb{C}[Y]$ irreduzibel ist. (Hinweis: Eisenstein-Kriterium)
- b) Man zeige, dass f ein irreduzibles Element im Ring $\mathbb{C}[X, Y]$ ist.

(8 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $p^m > 1$, mit $m \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl.

- a) Man zeige, dass jede maximale Untergruppe von G ein Normalteiler vom Index p ist.
- b) Sei N der Schnitt der maximalen Untergruppen von G . Man zeige, dass G/N abelsch ist und Exponent p hat. (Der Exponent einer endlichen Gruppe ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Elementordnungen.)

(8 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei R der Restklassenring $\mathbb{Z}/2006\mathbb{Z}$.

- a) Wie viele Nullstellen hat das Polynom $X^2 - 1$ in R ?
- b) Wie viele Nullstellen hat das Polynom $X^3 - 1$ in R ?

(7 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

Beweisen Sie:

Es sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe und U, V seien Untergruppen von G . Dann gilt $G = U \oplus V$ (d. h. G ist die direkte Summe von U und V) genau dann, wenn je zwei Nebenklassen $U + a$ und $V + b$ mit $(a, b \in G)$ genau ein Element gemeinsam haben. (5 Punkte)

Aufgabe 2:

Für welche Primzahlen $p = 10n + k$ ($n \geq 0, k \in \{1, 3, 7, 9\}$) ist 5 ein quadratischer Rest und für welche ein quadratischer Nichtrest? (5 Punkte)

Aufgabe 3:

Zeigen Sie:

- a) Die additive Gruppe der reellen Zahlen ist isomorph zur multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen.
- b) Die additive Gruppe eines Körpers ist nie isomorph zur multiplikativen Gruppe dieses Körpers.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:

Es sei L eine Galoiserweiterung eines Körpers K , so dass die Galoisgruppe von L über K die symmetrische Gruppe S_n mit $n \geq 5$ ist. Wie viele Zwischenkörper F mit $K < F < L$ existieren, so dass F eine Galoiserweiterung von K ist? Was ist die Galoisgruppe von F über K und die von L über F ? (5 Punkte)

Aufgabe 5:

Beweisen Sie:

- a) Eine Gruppe, in der jedes Element die Ordnung 2 hat, ist abelsch.
- b) Hat eine nichtabelsche Gruppe G der Ordnung 8 zwei verschiedene Elemente der Ordnung zwei, so ist sie isomorph zur Symmetriegruppe eines Quadrates (ist also insbesondere eine Diedergruppe).

(5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 6:

Es sei R ein kommutativer Ring mit 1. Es sei M ein maximales Ideal von R .

- a) Sei $1 + a$ invertierbar für jedes Element $a \in M$. Zeigen Sie, dass M das einzige maximale Ideal von R ist.
- b) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ der Faktorring R/M^n nur ein einziges maximales Ideal hat. (5 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

Gegeben sei eine natürliche Zahl m . Beweisen Sie:

- a) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $m \mid \varphi(n)$. (φ bezeichnet die Eulersche Phi-Funktion.)
- b) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, die in ihrer Dezimaldarstellung nur aus Nullen und Einsen bestehen und Vielfache von m sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:

G und H bezeichne endliche Gruppen, U sei eine Untergruppe von G und $f : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Beweisen Sie für die Gruppenindizes die Gleichung

$$[G : U] = [f(G) : f(U)] [\text{Kern } f : (\text{Kern } f \cap U)].$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3:

G sei eine Gruppe, und $G \times G$ bezeichne das direkte Produkt von G mit G . Beweisen oder widerlegen Sie:

- a) Ist jede Untergruppe von $G \times G$ Normalteiler, so ist G abelsch.
- b) Ist jede Untergruppe von G Normalteiler, so ist G abelsch.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:

R sei ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K , und $x \in K$ sei Nullstelle eines normierten Polynoms aus $R[X]$. Zeigen Sie: $x \in R$.

(5 Punkte)

Aufgabe 5:

Ist $K|\mathbb{Q}$ Galoiserweiterung vom Grad 4 mit zyklischer Galoisgruppe, so hat das Polynom $X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ keine Nullstelle in K .

(5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 6:

Sind $L|K$ und $M|L$ endliche Körpererweiterungen und ist $M|K$ galoissch mit Galoisgruppe G , so ist auch der Körper

$$K\left(\bigcup_{\sigma \in G} \sigma(L)\right)$$

galoissch über K .

(5 Punkte)