Prüfungsteilnehmer

Prüfungstermin

Einzelprüfungsnummer

Kennzahl: _____

Herbst

Kennwort: _____

2005

63911

Arbeitsplatz-Nr.: _____

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): **3**

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: **5**

Bitte wenden!

Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

- $\sqrt{35}$ ist irrational.
- Es gibt unendlich viele Primzahlen.
- Für unendlich viele ganze Zahlen n sind die beiden Zahlen $77n + 1$ und $143n + 2$ nicht teilerfremd.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und sei S_n die Gruppe der Permutationen von $\{1, 2, \dots, n\}$. Es bezeichne α den n -Zyklus $(1, 2, \dots, n)$ und H die von α erzeugte Untergruppe in S_n , ferner sei

$$G = \{\sigma \in S_n; \sigma(n) = n\}.$$

Zeigen Sie:

- Die Multiplikationsabbildung

$$H \times G \rightarrow S_n, \quad (\alpha^\ell, \sigma) \mapsto \alpha^\ell \sigma$$

ist bijektiv.

- Für $n \geq 4$ ist H kein Normalteiler von S_n .
- Zu jedem $\sigma \in G$ und jedem ℓ mit $1 \leq \ell \leq n$ existiert ein $\rho \in G$ mit $\sigma \alpha^\ell = \alpha^{\sigma(\ell)} \rho$.

Aufgabe 3 (8 Punkte):

Sei p eine Primzahl, sei $\zeta = \exp \frac{2\pi i}{p}$ und sei R der kleinste Unterring von $\mathbb{C}$, der $\mathbb{Z}$ und ζ enthält. Zeigen Sie:

- $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{p-2}$ ist eine $\mathbb{Z}$ -Basis von R .
- Sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es einen Ringisomorphismus

$$\mathbb{Z} / \left(\sum_{\ell=0}^{p-1} a^\ell \right) \xrightarrow{\cong} R / (a - \zeta)$$

- $2 - \zeta$ ist genau dann Primelement in R , wenn $2^p - 1$ Primzahl ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (8 Punkte):

Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $X^7 + 1 - i$ über $\mathbb{Q}(i)$, wobei $i^2 = -1$ sei. Für natürliche Zahlen n sei $\zeta_n = \exp \frac{2\pi i}{n}$. Zeigen Sie:

- a) $\mathbb{Q}(\zeta_7, i) = \mathbb{Q}(\zeta_{28})$ und $[\mathbb{Q}(\zeta_7, i) : \mathbb{Q}(i)] = 6$.
- b) $[L : \mathbb{Q}(i)] = 42$.
- c) L ist abgeschlossen unter der komplexen Konjugation.
- d) L ist Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$.

Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.**Vorbemerkung:** Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.**Aufgabe 1 (6 Punkte):**

Zeigen Sie, dass es zwei nichtisomorphe nichtabelsche Gruppen der Ordnung 20 gibt!

Aufgabe 2 (6 Punkte):Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie:

- Ist $\text{Aut}(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.
- Ist $|\text{Aut}(G)| = 2$, so ist G zyklisch der Ordnung 3, 4 oder 6.

Aufgabe 3 (6 Punkte):Sei R ein (nullteilerfreier, kommutativer) Hauptidealring und $I = Ra$ ein von $\{0\}$ verschiedenes Ideal von R . Zeigen Sie, dass I nur in endlich vielen Idealen von R enthalten ist!**Aufgabe 4 (6 Punkte):**

Zeigen Sie, dass das Polynom

$$f(X) = X^3 + X^2 - 2X - 1$$

in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist, und bestimmen Sie den Isomorphie-Typ seiner Galoisgruppe!**Aufgabe 5 (6 Punkte):**Sei K ein endlicher Körper und $L|K$ eine endliche Erweiterung mit Galoisgruppe G . Zeigen Sie, dass $L|K$ eine Normalbasis besitzt, d.h. zeigen Sie die Existenz eines $\alpha \in L$ mit

$$L = \sum_{\sigma \in G} K\sigma(\alpha)$$

Thema Nr. 3

(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.

Aufgabe 1 (7 Punkte):

- Bestimmen Sie alle Isomorphietypen abelscher Gruppen mit 56 Elementen!
- Zeigen Sie: Jede Gruppe mit 56 Elementen enthält eine normale Sylowuntergruppe $\neq 1$.
- Zeigen Sie: Enthält eine solche Gruppe G mit 56 Elementen eine nicht-normale 7-Sylowuntergruppe H und bezeichnet K die 2-Sylowuntergruppe in G , so ist $K \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

[Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der Zentralisator von K in H trivial ist und folgern Sie daraus, dass H auf den Elementen $\neq 1$ von K transitiv operiert.]

Aufgabe 2 (9 Punkte):

Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie:

- Die Abbildung

$$N : R \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad a + b\sqrt{2} \mapsto |a^2 - 2b^2|$$

ist multiplikativ.

- R ist ein euklidischer Ring bezüglich N .
- Ein Element $r \in R$ ist genau dann eine Einheit, wenn $N(r) = 1$ ist.
- R besitzt unendlich viele Einheiten.
- Zerlegen Sie das Element 21 in R in Primfaktoren.

Aufgabe 3 (7 Punkte):

Geben Sie alle Lösungen X der Gleichung

$$X^7 = \mathbb{1}_5$$

in der Gruppe $GL_5(\mathbb{Q})$ an (mit Begründung).

Aufgabe 4 (7 Punkte):

- Geben Sie ein Verfahren an, um mit Zirkel und Lineal zu einem gegebenen Dreieck ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt zu konstruieren!
- Sei α eine algebraische Zahl vom Grad 4 über $\mathbb{Q}$ und N der normale Abschluss von $\mathbb{Q}(\alpha)$. Zeigen Sie: Wenn $\text{Gal}(N|\mathbb{Q})$ isomorph zur alternierenden Gruppe A_4 ist, kann α nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.