Prüfungsteilnehmer

Prüfungstermin

Einzelprüfungsnummer

Kennzahl: _____

Frühjahr

Kennwort: _____

2005

63911

Arbeitsplatz-Nr.: _____

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): **3**

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: **5**

Bitte wenden!

Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: Auf die einzelnen Aufgaben wird jeweils maximal die in Klammern angegebene Punktzahl vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Beweisen oder widerlegen Sie: Eine natürliche Zahl der Gestalt $4n + 3$ mit $n \in \mathbb{N}$ besitzt keine Darstellung als Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Sei R ein Integritätsring. Für Ideale a, b in R definiert man

$$a \sim b :\Leftrightarrow \text{Es gibt } \alpha, \beta \in R \setminus \{0\} \text{ mit } \alpha \cdot a = \beta \cdot b.$$

Zeigen Sie:

a) Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, und es gilt

$$a_1 \sim b_1, a_2 \sim b_2 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \sim b_1 \cdot b_2$$

b) Genau dann gilt $a \sim b$, wenn a und b als R -Moduln isomorph sind.

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von $26 + 13i$ und $14 - 5i$ im Ring $\mathbb{Z}[i]$ der Gaußschen ganzen Zahlen.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Untersuchen Sie (mit Beweis) auf Irreduzibilität:

a) $f(X) = X^4 - X^3 - 9X^2 + 4X + 2$ und
 $g(X) = X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$.

b) $f(X, Y) = Y^6 + XY^5 + 2XY^3 + 2X^2Y^2 - X^3Y + X^2 + X$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5 (9 Punkte):

Sei k ein Körper mit $\text{char } k \neq 2$, sei $f \in k[X]$ ein Polynom vom Grade $n \geq 2$, sei K ein Zerfällungskörper von f über k , und f habe n verschiedene Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ in K .

Das Element $\Delta \in K$ sei definiert durch

$$\Delta := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Dann heißt $D := \Delta^2$ die Diskriminante von f .

a) Zeigen Sie: K ist galoissch über k und es ist $D \in k$.

b) Sei $G := \text{Gal}(K|k)$ die Galoisgruppe von K über k . Zeigen Sie:

$\Delta \in k \Leftrightarrow$ Jedes $\sigma \in G$ definiert eine gerade Permutation der $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

c) Sei $f := X^4 + 2aX^2 + b \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel. Bestimmen Sie die Diskriminante von f und zeigen Sie:

$$\sqrt{b} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: Auf die einzelnen Aufgaben wird jeweils maximal die in Klammern angegebene Punktzahl vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Beweisen Sie den Satz von Lagrange: Ist G eine endliche Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe, so ist $|H|$ ein Teiler von $|G|$.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

- Zeigen Sie, dass eine nichtabelsche einfache Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_6 bereits in der alternierenden Gruppe A_6 liegt.
- Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 120 gibt.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Seien R und S Ringe (mit 1). Zeigen Sie, dass die (zweiseitigen) Ideale des direkten Produktes $R \times S$ die Form $I \times J$ haben mit Idealen I bzw. J von R bzw. S .

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Es seien p und q Primzahlen. Bestimmen Sie die Anzahl der irreduziblen normierten Polynome vom Grad q über dem Körper $\mathbb{F}_p$.

Aufgabe 5 (7 Punkte):

Beweisen Sie mit Mitteln der Algebra, dass das regelmäßige Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, das regelmäßige Siebeneck aber nicht.

Thema Nr. 3

(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: Auf die einzelnen Aufgaben wird jeweils maximal die in Klammern angegebene Punktzahl vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1 (3 Punkte):Zeigen Sie: Jede endliche Körperweiterung L über K ist algebraisch.**Aufgabe 2** (6 Punkte):

- Geben Sie eine Gruppe mit genau 16 Untergruppen an.
- Geben Sie einen Körper mit genau 16 Teilkörpern an.

Aufgabe 3 (7 Punkte):

Geben Sie explizit einen Ring-Isomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z}/1000\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$$

und seine Umkehrung φ^{-1} an.**Aufgabe 4** (6 Punkte):

Hat die Gleichung

$$x^2 + 91y = 5$$

eine ganzzahlige Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (8 Punkte):Sei $f = X^n - a$ ein über $\mathbb{Q}$ irreduzibles Polynom mit abelscher Galoisgruppe $\text{Gal}(f|\mathbb{Q})$.Zeigen Sie, dass n eine Potenz von 2 ist.

[Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\text{Gal}(f|\mathbb{Q})$ nichtabelsch ist, wenn n eine ungerade Primzahl ist.]