MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 13
11.07.2007

Übungen zur Vorlesung
Differential– und Integralrechnung II (NV)
Lösungsvorschlag

49. Es sei $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Man zeige, dass f in $(0,0)$ nicht stetig ist, indem man

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx$$

bestätige.

Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x-y)\frac{1}{(x+y)^3}dx &= (x-y)\frac{1}{-2(x+y)^2}|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{-2(x+y)^2}dx \\
&= ((x-y)\frac{1}{-2(x+y)^2} - \frac{1}{2(x+y)})|_0^1 \\
&= -\frac{x}{(x+y)^2}|_0^1 = -\frac{1}{(1+y)^2} \\
\int_0^1 -\frac{1}{(1+y)^2}dy &= \frac{1}{1+y}|_0^1 = \frac{3}{2} \\
\int_0^1 (x-y)\frac{1}{(x+y)^3}dy &= (x-y)\frac{1}{-2(x+y)^2}|_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{-2(x+y)^2}dx \\
&= ((x-y)\frac{1}{-2(x+y)^2} + \frac{1}{2(x+y)})|_0^1 \\
&= \frac{y}{(x+y)^2}|_0^1 = \frac{1}{(x+1)^2} \\
\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx &= -\frac{1}{1+x}|_0^1 = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

50. *(Staatsexamen Frühjahr 2000.)* Gegeben sei das Rechteck

$$R := [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$$

sowie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \sqrt{1 + x^4y^4}.$$

Man berechne das Integral

$$\int_R \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) d(x, y).$$

Dies ist bei Herrn Dr. Schörner nachzulesen unter

`www.mathematik.uni-muenchen.de/~schoerne/analysis-w06/bv08.pdf.`

51. *(Staatsexamen Herbst 2004.)* In der (x, y)-Ebene sei M das von den Geraden $x + y = \sqrt{2}$ und $-x + y = \sqrt{2}$ und dem oberen Bogen des Einheitskreises $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ begrenzte Gebiet.

    a) Man skizziere M.

    b) Man berechne die Fläche von M.

    c) Man berechne durch Integration das Volumen des Körpers, der durch Rotation von M um die y-Achse entsteht.

    a)

    b) M besteht aus dem rechtwinklig, gleichschenkligen Dreieck mit Kathetenlänge 1 abzüglich des Kreissegments, dessen Fläche sich folgendermaßen berechnet: $\frac{1}{4}$ des Einheitskreises abzüglich des Quadrates mit Seitenlänge $\sqrt{2}$, also $\frac{1}{4}(\pi - 2)$. M hat also die Fläche $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\pi - 2) = 1 - \frac{1}{4}\pi$.

    c) Für $0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ integrieren wir die Kreiszylinderseitenflächen mit Radius x und Höhe $(-x + \sqrt{2} - \sqrt{1 - x^2})$ auf:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2x\pi(-x + \sqrt{2} - \sqrt{1 - x^2})dx &= 2\pi(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{1}{3}(1 - x^2)^{\frac{3}{2}})|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= 2\pi(-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}) - 2\pi(\frac{1}{3}) \\ &= \pi(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3}) = \pi\frac{3\sqrt{2} - 4}{6}\end{aligned}$$

52. *(Staatsexamen Herbst 1993.)* Seien a und b positive reelle Zahlen. Man berechne mit Hilfe der Koordinatentransformation $x = ra\cos\varphi$ und $y = rb\sin\varphi$ das Integral

$$\int_B \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) d(x, y)$$

mit

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}.$$

Mit der Transformation $g : [0, \infty[\times[0, 2\pi[, \ (r, \varphi) \mapsto (ra\cos\varphi, rb\sin\varphi)$ gilt

$$J(g(r,\varphi)) = \begin{pmatrix} a\cos\varphi & b\sin\varphi \\ -ra\sin\varphi & rb\cos\varphi \end{pmatrix},$$
$$\det(J(g(r,\varphi))) = rab(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = rab$$

und

$$g([0,1]\times[0,2\pi[) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Die Transformationsformel schließlich liefert

$$\begin{aligned}
&\int_{g([0,1]\times[0,2\pi[)} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) d(x,y) \\
=&\int_{[0,1]\times[0,2\pi[} \exp\left(-\frac{(ra\cos\varphi)^2}{a^2} - \frac{(rb\sin\varphi)^2}{b^2}\right) |\det(J(g(r,\varphi)))| d(r,\varphi) \\
=&\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,2\pi[} \exp\left(-r^2\right) |rab| d\varphi\right) dr \\
=&ab\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,2\pi[} r\exp\left(-r^2\right) d\varphi\right) dr \\
=&ab\int_{[0,1]} \left(r\exp\left(-r^2\right) \varphi|_0^{2\pi}\right) dr \\
=&ab\int_{[0,1]} r\exp\left(-r^2\right) 2\pi dr \\
=&ab\left(-\frac{1}{2}\exp\left(-r^2\right) 2\pi\right) |_0^1 \\
=&-ab\pi\left(\exp(-1) - 1\right) \\
=&ab\pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)
\end{aligned}$$