MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 12
04.07.2007

Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung II (NV) Lösungsvorschlag

45. Berechnen Sie

a)
$$\int_0^2 (\int_0^1 x - x^2 y dx) dy,$$

b)
$$\int_0^1 (\int_0^2 x - x^2 y dy) dx$$

und vergleichen Sie das Ergebnis mit a).

a)
$$\int_0^2 (\int_0^1 x - x^2 y dx) dy = \int_0^2 (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 y)|_0^1 dy = \int_0^2 \frac{1}{2} - \frac{1}{3} y dy$$
$$= (\frac{1}{2}y - \frac{1}{6}y^2)|_0^2 = 1 - \frac{4}{6} = \frac{1}{3},$$

b)
$$\int_0^1 (\int_0^2 x - x^2 y dy) dx = \int_0^1 (xy - \frac{1}{2}x^2 y^2)|_0^2 dx = \int_0^1 2x - 2x^2 dx$$
$$= (x^2 - \frac{2}{3}x^3)|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

wegen der Stetigkeit von f ist die Integrationsreihenfolge egal.

46. *(Staatsexamen Frühjahr 2001.)* Man berechne für die Menge

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | |x| + |y| \leq 1\}$$

das Integral

$$\int_B e^{x+y} d(x, y).$$

(Hinweis: Skizzieren Sie zunächst B.)

B ist das auf die Spitze gestellte Quadrat mit Eckpunkten $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Wir berechnen die Fläche unter- und oberhalb der x-Achse getrennt:

$$\begin{aligned}
\int_B e^{x+y} d(x,y) =& \int_{-1}^{0} \int_{-(1+y)}^{1+y} e^{x+y} dx dy + \int_0^1 \int_{-(1-y)}^{1-y} e^{x+y} dx dy \\
=& \int_{-1}^{0} e^{x+y}|_{-(1+y)}^{1+y} dy + \int_0^1 e^{x+y}|_{-(1-y)}^{1-y} dy \\
=& \int_{-1}^{0} e^{1+y+y} - e^{-(1+y)+y} dy + \int_0^1 e^{1-y+y} - e^{-(1-y)+y} dy \\
=& \int_{-1}^{0} e^{1+2y} - e^{-1} dy + \int_0^1 e^1 - e^{-1+2y} dy \\
=& (\frac{1}{2} e^{1+2y} - y e^{-1})|_{-1}^{0} + (ye - \frac{1}{2} e^{-1+2y})|_0^1 \\
=& \frac{1}{2} e - (\frac{1}{2} e^{-1} + e^{-1}) + e - \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} e^{-1} = e - e^{-1}
\end{aligned}$$

47. Berechnen sie das Volumen der Einheitskugel

$$S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

indem Sie in z-Richtung von -1 bis 1 über die Flächen der Kreise mit Radius $\sqrt{1-z^2}$ integrieren.
(Hinweis: Skizze.)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-z^2}^2 \pi dz = \pi \int_{-1}^{1} (1-z^2) dz = \pi (z - \frac{1}{3} z^3)|_{-1}^{1} = \pi (1 - \frac{1}{3} - (-1 + \frac{1}{3})) \\
= \pi \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

48. *(Staatsexamen Herbst 1997.)* Gegeben seien

$$K_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

und

$$K_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Man bestimme das Volumen von $K_0 \cap K_1$ durch Berechnung eines Integrals.
(Hinweis: Skizze.)

Geschnitten werden 2 Kugeln mit Radius 1 und Mittelpunkten $(0,0,0)$ und $(1,0,0)$. Die Schnittmenge liegt also zwischen $0 \leq x \leq 1$ und besteht aus 2 Kugelsegmenten. Wir berechnen das für $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, indem wir die Kreise mit Radius $\sqrt{1-(1-x)^2}$ aufintegrieren, und verdoppeln sein Volumen:

$$\begin{aligned}
2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-(1-x)^2}^2 \pi dx = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} 1 - (1-x)^2 dx = 2\pi (x + \frac{1}{3}(1-x)^3)|_0^{\frac{1}{2}} \\
= 2\pi (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2})^3 - \frac{1}{3}) = \pi \frac{5}{12}
\end{aligned}$$