MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 11
27.06.2007

Übungen zur Vorlesung
Differential– und Integralrechnung II (NV)
Lösungsvorschlag

41. *(Staatsexamen Frühjahr 2000.)* Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

a) Besimmen Sie $f(\mathbb{R}^2)$.

b) Sei $J(x, y)$ die Jacobi-Matrix von f in (x, y). Besimmen Sie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | J(x, y) \text{ ist invertierbar}\}.$$

c) Ist f injektiv?

a) Für festes x ist $f(x \times \mathbb{R})$ ein Kreis um den Ursprung mit Radius e^x. Läßt man auch x laufen, erhält man alle Kreise mit positivem Radius $\Rightarrow f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

b)

$$J(x, y) = e^x \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$$
$$\det(J(x, y)) = e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} \neq 0$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, damit ist $J(x, y)$ überall invertierbar.

c) Nein, z.B. gilt $f(0, 0) = (1, 0) = f(0, 2\pi)$.

42. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch

$$F(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy)$$

definierte Abbildung.

a) Man berechne die Funktionalmatrix von F und,

b) wo sie existiert, ihre Inverse.

a)

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix}$$
$$\det(DF(x, y)) = 4x^2 + 4y^2 > 0$$

für alle $(x, y) \neq (0, 0)$.

b)

$$(DF(x,y))^{-1} = \frac{1}{4x^2+4y^2}\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

43. Gegeben sei die Funktion

$$f : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, \frac{\pi}{2}],\ f(x) := x \sin x.$$

a) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt,

b) skizzieren Sie f und f^{-1} und

c) berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1\prime}(\frac{\pi}{2})$ an der Stelle $\frac{\pi}{2}$.

a) $f'(x) = \sin x + x\cos x > 0$ für $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, damit ist f streng monoton steigend, also injektiv. Weil $f([0, \frac{\pi}{2}]) = [0, \frac{\pi}{2}]$, auch surjektiv.

b)

c) $f^{-1\prime}(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\frac{\pi}{2}))} = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{2})} = 1$

44. Gegeben sei die Funktion

$$F :]0, \infty[\times \mathbb{R} \to]0, \infty[\times \mathbb{R}, \qquad F(x,y) := (x^2, xy^3).$$

a) Zeigen Sie, dass F umkehrbar ist mit Umkehrfunktion

$$F^{-1}(u,v) = (\sqrt{u}, \frac{\sqrt[3]{v}}{\sqrt[6]{u}}),$$

b) bestimmen Sie die Funktionalmatrix von F und, wo sie existiert, ihre Inverse, und

c) zeigen Sie, dass $F^{-1}(4,-2) = (2,-1)$, und dass für die Funktionalmatrix von F^{-1} im Punkt $(4,-2)$ gilt

$$D(F^{-1})(4,-2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

ohne diese zu berechnen.

a)

$$F^{-1}(F(x,y)) = (\sqrt{x^2}, \frac{\sqrt[3]{xy^3}}{\sqrt[6]{x^2}}) = (x,y) \quad \forall (x,y)$$

$$F(F^{-1}(u,v)) = (\sqrt{u}^2, \sqrt{u}(\frac{\sqrt[3]{v}}{\sqrt[6]{u}})^3) = (u,v) \quad \forall (u,v)$$

b)

$$
\begin{aligned}
DF(x,y) &= \begin{pmatrix} 2x & y^3 \\ 0 & 3xy^2 \end{pmatrix} \\
\det(DF(x,y)) &= 6x^2y^2 > 0
\end{aligned}
$$

für $y \neq 0$.

$$
(DF(x,y))^{-1} = \frac{1}{6x^2y^2} \begin{pmatrix} 3xy^2 & -y^3 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
F^{-1}(4,-2) &= (\sqrt{4}, \frac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[6]{4}}) = (2,-1) \\
D(F^{-1})(4,-2) &= (DF(F^{-1}(4,-2)))^{-1} = (DF(2,-1))^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(Hinweis: Die Jacobi-Matrix und die Funktionalmatrix sind das gleiche.)