MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 10
20.06.2007

Übungen zur Vorlesung
Differential– und Integralrechnung II (NV)
Lösungsvorschlag

37. Untersuchen Sie

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y, z) \mapsto e^{x+y}(x^2 - z^2 + x + y)$$

auf lokale Extrema.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{x+y}(x^2 - z^2 + x + y + 2x + 1)\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= e^{x+y}(x^2 - z^2 + x + y + 1)\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= e^{x+y}(-2z)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} &= e^{x+y}(x^2 - z^2 + x + y + 2x + 1 + 2x + 1 + 2)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} &= e^{x+y}(x^2 - z^2 + x + y + 1 + 1)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} &= e^{x+y}(-2)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= e^{x+y}(x^2 - z^2 + x + y + 2x + 1 + 1)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} &= e^{x+y}(-2z)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= e^{x+y}(-2z)
\end{aligned}$$

Aus

$$\begin{pmatrix} e^{x+y}(x^2 - z^2 + x + y + 2x + 1) \\ e^{x+y}(x^2 - z^2 + x + y + 1) \\ e^{x+y}(-2z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $e^{x+y} > 0$ folgt $z = 0$ und $x^2 - z^2 + x + y + 2x + 1 = 0 = x^2 - z^2 + x + y + 1$, also $x = 0$ und $y = -1$. $(0, -1, 0)$ ist also der einzige kritische Punkt.

$$\text{Hess}(f)(0, -1, 0) = e^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

und

$$\det e^{-1}\begin{pmatrix}3\end{pmatrix} = e^{-1}3, \quad \det e^{-1}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = e^{-2}2, \quad \det e^{-1}\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} = -e^{-3}4,$$

also ist $\mathrm{Hess}(f)(0,-1,0)$ indefinit und bei $(0,-1,0)$ ein Sattelpunkt.

Also, eigentlich sollte f ein Minimum haben, dafür muß es so heißen:

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, \qquad (x,y,z)\mapsto e^{x+y}(x^2+z^2+x+y).$$

Das ändert eigentlich nur

$$\mathrm{Hess}(f)(0,-1,0) = e^{-1}\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

also

$$\det e^{-1}\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = e^{-3}4,$$

also ist $\mathrm{Hess}(f)(0,-1,0)$ positiv definit und bei $(0,-1,0)$ ein Minimum.

38. *(Staatsexamen Frühjahr 2002.)* Man bestimme Minimum und Maximum der Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \qquad f(x,y) := (x^2+10xy+y^2)e^{x^2+y^2}$$

auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe.

(Hinweis: Polarkoordinaten.)

Dies ist bei Herrn Dr. Schörner nachzulesen unter

`www.mathematik.uni-muenchen.de/~schoerne/diff+int2-s06/s-lv10.pdf.`

39. *(Staatsexamen Frühjahr 1992.)* Man bestimme Minimum und Maximum der Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \qquad f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)}(2x^2+3y^2)$$

auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $M := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2\le 4\}$.

(Indem man f in Polarkoordinaten als $f(r,\phi) = g(r)h(\phi)$ darstelle und zunächst $g'(r)$ betachte.)

Dies ist bei Herrn Dr. Schörner nachzulesen unter

`www.mathematik.uni-muenchen.de/~schoerne/diff+int2-s05/s-lv10.pdf.`

40. Und noch mal so ähnlich in kartesischen Koordinaten: Man bestimme alle kritischen Punkte, lokale Extrema und Sattelpunkte der Funktion aus Aufgabe 39.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{-(x^2+y^2)}(-4x^3 - 6xy^2 + 4x) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= e^{-(x^2+y^2)}(-4x^2y - 6y^3 + 6y) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} &= e^{-(x^2+y^2)}(8x^4 + 12x^2y^2 - 8x^2 - 12x^2 - 6y^2 + 4) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} &= e^{-(x^2+y^2)}(8x^2y^2 + 12y^4 - 12y^2 - 4x^2 - 18y^2 + 6) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= e^{-(x^2+y^2)}(8x^3y + 12xy^3 - 8xy - 12xy)
\end{aligned}$$

Aus

$$\begin{pmatrix} e^{-(x^2+y^2)}(-4x^3 - 6xy^2 + 4x) \\ e^{-(x^2+y^2)}(-4x^2y - 6y^3 + 6y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $e^{-(x^2+y^2)} > 0$ folgt:
Entweder $y = 0$, also $-4x^3 + 4x = 0$, d.h. $x \in \{-1, 0, 1\}$.
Oder $y \neq 0$, also $6y^2 = -4x^2 + 6$, d.h. $-4x^3 - x(-4x^2 + 6) + 4x = -2x = 0$, also $x = 0$ und $y \in \{-1, 1\}$. Die kritischen Punkte heißen also: $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}(f)(0,0) &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} && \text{ist positiv definit,} \\
\mathrm{Hess}(f)(0,\pm 1) &= e^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} && \text{ist negativ definit,} \\
\mathrm{Hess}(f)(\pm 1,0) &= e^{-1}\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} && \text{ist indefinit.}
\end{aligned}$$

Also befinden sich bei $(0, 0)$ das Minimum, bei $(0, \pm 1)$ die Maxima und bei $(\pm 1, 0)$ Sattelpunkte.