MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 9
13.06.2007

Übungen zur Vorlesung
Differential– und Integralrechnung II (NV)
Lösungsvorschlag

33. Gegeben sei die Funktion

$$f\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := x^3 + 3xy^2 - 3xy.$$

a) Man bestimme den Gradienten $\operatorname{grad} f(x,y)$ und die Hessematrix $\operatorname{Hess} f(x,y)$ der Funktion f für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Man zeige, dass f genau vier kritische Punte besitzt, nämlich $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(0,0)$, $(0,1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

c) Man untersuche f auf lokale Extremstellen und Sattelpunkte.

Dies ist bei Herrn Dr. Schörner nachzulesen unter

`www.mathematik.uni-muenchen.de/~schoerne/diff+int2-s06/s-tut12.pdf.`

34. *(Staatsexamen Frühjahr 2005.)* Gegeben sei die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{y^2} - \frac{y^2}{16}$$

mit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\}$.

a) Man bestimme alle lokalen Extrema von f.

b) Ist f nach oben beschränkt?

Dies ist bei Herrn Dr. Schörner nachzulesen unter

`www.mathematik.uni-muenchen.de/~schoerne/diff+int2-s06/s-tut12.pdf.`

35. Man bestimme die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f :]0,\infty[\times]0,\infty[, \qquad f(x,y) := \frac{x-y}{x+y},$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich den Gliedern 2. Ordnung.

$$\frac{\partial \frac{x-y}{x+y}}{\partial x} = \frac{2y}{(x+y)^2} \qquad \frac{\partial \frac{x-y}{x+y}}{\partial y} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial\partial \frac{x-y}{x+y}}{\partial x\partial x} = \frac{-4y}{(x+y)^3} \qquad \frac{\partial\partial \frac{x-y}{x+y}}{\partial y\partial y} = \frac{4x}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial\partial \frac{x-y}{x+y}}{\partial x\partial y} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$$

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) &= f(1,1) + \frac{\partial f(1,1)}{\partial x}(x-1) + \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}(y-1) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial\partial f(1,1)}{\partial x\partial x}(x-1)^2 + \frac{\partial\partial f(1,1)}{\partial x\partial y}(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}\frac{\partial\partial f(1,1)}{\partial y\partial y}(y-1)^2 \\
&= 0 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) \\
&- \frac{1}{2}\frac{1}{2}(x-1)^2 + 0(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}(y-1)^2 \\
&= -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + x - y
\end{aligned}$$

36. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

eine symmetrische 2×2-Matrix. Weiter sei D die Determinante von A, also $D = ac - b^2$.
Man beweise direkt ohne Benutzung des Determinantenkriteriums von Hurwitz/Jacobi:

a) A ist positiv definit, falls $a > 0$ und $D > 0$.
b) A ist negativ definit, falls $a < 0$ und $D > 0$.
c) A ist indefinit, falls $D < 0$.

(Hinweis: Bedenken Sie, dass positiv definit bedeutet, dass

$$a\xi_1^2 + 2b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2 =< \xi, A\xi >> 0$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, und betrachten Sie

$$a[(\xi_1 + \frac{b}{a}\xi_2)^2 + \frac{\xi_2^2}{a^2}(ac - b^2)].)$$

a) und
b) (in beiden Fällen ist $a \neq 0$):

$$\begin{aligned}
a\xi_1^2 + 2b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2 &= a[\xi_1^2 + 2\frac{b}{a}\xi_1\xi_2 + \frac{b^2}{a^2}\xi_2^2 - \frac{b^2}{a^2}\xi_2^2 + \frac{c}{a}\xi_2^2] \\
&= a[(\xi_1 + \frac{b}{a}\xi_2)^2 + \frac{\xi_2^2}{a^2}(ac - b^2)]
\end{aligned}$$

Ist nun $ac - b^2 > 0$, so ist die ganze eckige Klammer > 0. Damit hat der ganze Ausdruck das gleiche Vorzeichen wie a (unabhängig von ξ).

c) Ist dagegen $ac - b^2 < 0$, kann ξ sowohl so gewählt werden, dass der Ausdruck positiv wird, also auch so, dass er negativ wird:

   i. $a = 0$: $\Rightarrow b \neq 0$

      A. $c = 0$: $2b(1)(1)$ und $2b(1)(-1)$ haben entgegengesetztes Vorzeichen,

      B. $c \neq 0$: $2b(1)(-2\frac{b}{c} - b) + c(-2\frac{b}{c} - b)^2$ und $2b(1)(-2\frac{b}{c} + b) + c(-2\frac{b}{c} + b)^2$ haben entgegengesetztes Vorzeichen,

   ii. $a \neq 0$: für $(\xi_1, \xi_2) = (1, 0)$ ist die eckige Klammer $= 1$ und für $(\xi_1, \xi_2) = (-\frac{b}{a}, 1)$ ist sie $= \frac{1}{a^2}(ac - b^2) < 0$. Unabhängig von a hat der ganze Ausdruck in beiden Fällen entgegengesetztes Vorzeichen.