MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 8
06.06.2007

Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung II (NV) Lösungsvorschlag

29. *(Staatsexamen Frühjahr 1999.)* Gegeben sei die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \begin{cases} \frac{\sin(x^3)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Untersuchen Sie, in welchen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Funktion f stetig ist. (Hinweis: $|\sin(x)| \leq |x| \forall x \in \mathbb{R}$ darf ohne Beweis verwendet werden.)

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f in $(0,0)$ partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$. (Hinweis: $\frac{\sin(x^3)}{x^2+y^2}$ muss dafür nicht differenziert werden.)

a) Außerhalb des Ursprungs ist sie es, und in ihm auch: Sei (x_n, y_n) eine Folge mit Limes $(0,0)$, dann gilt:

$$\left|\frac{\sin(x_n^3)}{x_n^2+y_n^2}\right| = \frac{|\sin(x_n^3)|}{x_n^2+y_n^2} \leq \frac{|x_n^3|}{x_n^2+y_n^2} \leq \frac{|x_n^3|}{x_n^2} = |x_n| \to 0$$

b)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin(h^3)}{h^2+0^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h^3)}{h^3} = 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin(0^3)}{0^2+h^2}}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

30. Sei f wie in Aufgabe 22) von letzter Woche.

a) Ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ stetig im Ursprung?

b) Begründen Sie, dass Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ 22)b) widerspräche.

a) Außerhalb des Ursprungs gilt

$$\frac{\partial \frac{x^2y}{x^4+y^2}}{\partial x} = \frac{2xy(-x^4+y^2)}{(x^4+y^2)^2}$$

und im Ursprung

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2 0}{h^4+0^2}}{h}=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Wir nähern uns nun dem Ursprung mit einer Folge (t_n,t_n) mit $\lim t_n=0$:

$$\lim\frac{2t_nt_n(-t_n^4+t_n^2)}{(t_n^4+t_n^2)^2}=\lim\frac{2(-t_n^6+t_n^4)}{t_n^8+2t_n^6+t_n^4}=\lim\frac{2(-t_n^2+1)}{t_n^4+2t_n^2+1}=2\neq 0.$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ nicht stetig im Ursprung.

b) Wären beide partiellen Ableitungen stetig, so folgte totale Differenzierbarkeit von f auf ganz $\mathbb{R}^2$. D.h. es gäbe für (jedes $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, also insbesondere für) $(0,0)$ eine lineare Abbildung $A_{(0,0)}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x,y)=f(0,0)+A_{(0,0)}(x,y)+h_{(0,0)}(x,y)$$

mit

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{h_{(0,0)}(x,y)}{||(x,y)||}=0.$$

Daraus folgte

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(0,0)+A(x,y)+h(x,y)\\&=f(0,0)+\lim_{(x,y)\to(0,0)}A(x,y)+\lim_{(x,y)\to(0,0)}h(x,y)\\&=f(0,0)+0+\lim_{(x,y)\to(0,0)}||(x,y)||\frac{h(x,y)}{||(x,y)||}\\&=f(0,0)+0+0^2,\end{aligned}$$

also wäre f im Ursprung stetig.

31. a) Für die Funktion $f:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{||x||}$ zeige man: $\nabla\times\nabla f=0$.

b) Für die Funktion $f:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{||x||^2}$ zeige man: $\nabla\times\nabla f=0$.

c) Sei U offen in $\mathbb{R}^3$ und $f:U\to\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Welche zusätzliche Eigenschaft von f muss erfüllt sein, damit gilt: $\nabla\times\nabla f=0$? (Begründung!)

d) Für die Funktion $f:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{||x||}$ zeige man: $<\nabla,\nabla f>=0$.

e) Für die Funktion $f:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{||x||^2}$ zeige man: $<\nabla,\nabla f>\neq 0$.

(Wobei $||x||=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ bezeichnet.)

Für die partiellen Ableitungen gilt ($1\le i,j\le 3,\ i\neq j$):

$$\frac{\partial\frac{1}{||x||}}{\partial x_i}=\frac{-x_i}{||x||^3}\qquad\qquad\frac{\partial\frac{1}{||x||^2}}{\partial x_i}=\frac{-2x_i}{||x||^4}$$

$$\frac{\partial\partial\frac{1}{||x||}}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{3x_ix_j}{||x||^5}\qquad\qquad\frac{\partial\partial\frac{1}{||x||^2}}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{8x_ix_j}{||x||^6}$$

$$\frac{\partial\partial\frac{1}{||x||}}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{-||x||^2+3x_i^2}{||x||^5}\qquad\qquad\frac{\partial\partial\frac{1}{||x||^2}}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{-2||x||^2+8x_i^2}{||x||^6}$$

a)

$$\nabla \times \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial\partial f}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial\partial f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial\partial f}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial\partial f}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

weil die 2. partiellen Ableitungen kommutativ sind.

b) Geanuso.

c) Für $i \neq j$ muss $\frac{\partial\partial f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial\partial f}{\partial x_i \partial x_j}$ sein. Dies ist gegeben, wenn die 2. partiellen Ableitungen stetig sind.

d)

$$\begin{aligned} < \nabla, \nabla \frac{1}{||x||} > &= \frac{\partial\partial \frac{1}{||x||}}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial\partial \frac{1}{||x||}}{\partial x_2 \partial x_2} + \frac{\partial\partial \frac{1}{||x||}}{\partial x_3 \partial x_3} \\ &= \frac{-||x||^2 + 3x_1^2}{||x||^5} + \frac{-||x||^2 + 3x_2^2}{||x||^5} + \frac{-||x||^2 + 3x_3^2}{||x||^5} \\ &= \frac{-3||x||^2 + 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2}{||x||^5} = \frac{-3||x||^2 + 3||x||^2}{||x||^5} = 0 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} < \nabla, \nabla \frac{1}{||x||^2} > &= \frac{\partial\partial \frac{1}{||x||^2}}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial\partial \frac{1}{||x||^2}}{\partial x_2 \partial x_2} + \frac{\partial\partial \frac{1}{||x||^2}}{\partial x_3 \partial x_3} \\ &= \frac{-2||x||^2 + 8x_1^2}{||x||^6} + \frac{-2||x||^2 + 8x_2^2}{||x||^6} + \frac{-2||x||^2 + 8x_3^2}{||x||^6} \\ &= \frac{-6||x||^2 + 8x_1^2 + 8x_2^2 + 8x_3^2}{||x||^6} = \frac{-6||x||^2 + 8||x||^2}{||x||^6} \\ &= \frac{2}{||x||^4} \neq 0 \end{aligned}$$

32. *(Staatsexamen Herbst 1994.)* Man beweise mit Hilfe der Taylorformel die Ungleichung

$$0 \leq 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} \leq \frac{1}{8} 10^{-4}$$

für alle $x \in [0, \frac{1}{100}]$.
(Hinweis: Machen Sie sich Gedanken über $\sqrt{1+x}$.)

Dies ist bei Herrn Dr. Schörner nachzulesen unter

`www.mathematik.uni-muenchen.de/~schoerne/diff+int2-s06/s-bv06.pdf`.