

Übungen zur Vorlesung Differential- und Integralrechnung II (NV) Lösungsvorschlag

25. (*Staatsexamen Herbst 2000.*) $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion und a, b, c reelle Zahlen, wobei $a \neq 0$. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) := \phi(ay - bx) \exp\left(-\frac{cx}{a}\right).$$

Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$a \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + cf(x, y) = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \exp\left(-\frac{cx}{a}\right) \left(-\frac{c}{a} \phi(ay - bx) - b\phi'(ay - bx)\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \exp\left(-\frac{cx}{a}\right) a\phi'(ay - bx) \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} &a \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + cf(x, y) \\ &= a \exp\left(-\frac{cx}{a}\right) \left(-\frac{c}{a} \phi(ay - bx) - b\phi'(ay - bx)\right) \\ &+ b \exp\left(-\frac{cx}{a}\right) a\phi'(ay - bx) + c\phi(ay - bx) \exp\left(-\frac{cx}{a}\right) = 0 \end{aligned}$$

26. (*Staatsexamen Herbst 1995.*) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Man zeige:

- a) Für jedes $u = (x_u, y_u) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ ist die Funktion $f_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_u(t) := f(tx_u, ty_u)$, differenzierbar an der Stelle 0.

- b) f ist nicht stetig an der Stelle $(0,0)$.
(Hinweis: Dazu nähere man sich dem Ursprung mit einer geeigneten Folge.)

Dies ist bei Herrn Dr. Schörner nachzulesen unter

www.mathematik.uni-muenchen.de/~schoerne/diff+int2-s05/s-lv10.pdf.

27. (*Staatsexamen Frühjahr 1995.*) Sei $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(-1, -1) = -1$, $f(-1, 1) = 0 = f(1, -1)$, $f(1, 1) = 1$. Man zeige, dass f in $[-1, 1] \times [-1, 1]$ noch unendlich viele Nullstellen hat.
(Hinweis: Man helfe sich mit einer Skizze und dem Zwischenwertsatz.)

Dies ist bei Herrn Dr. Schörner nachzulesen unter

www.mathematik.uni-muenchen.de/~schoerne/diff+int2-s06/s-lv09.pdf.

28. (*Staatsexamen Frühjahr 2001.*) Man entwickle die beiden Funktionen

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x \quad \text{und} \quad f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

an der Stelle 2 in einer Taylorreihe und gebe die Konvergenzintervalle dieser Reihen an.

(Hinweis: Die Konvergenzintervalle umfassen diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für welche die Taylorreihen konvergieren (Quotientenkriterium).)

Dies ist bei Herrn Dr. Schörner nachzulesen unter

www.mathematik.uni-muenchen.de/~schoerne/diff+int2-s06/s-lv06.pdf.