MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 1
18.04.2007

Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung II (NV) Lösungsvorschlag

1. *(Staatsexamen Frühjahr 2000)* Eine geschlossene kreisförmige Blechdose (= geschlossener Kreiszylinder mit Höhe h und Grundflächenradius r) mit dem Inhalt 1 Liter soll so konstruiert werden, dass der Materialverbrauch minimal ist.

   Wie müssen r und h gewählt werden?

   Es gilt, die Fläche in Abhängigkeit von einer Variablen aufzustellen, diese abzuleiten, um ihr Minimum zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
Fl\ddot{a}che =& 2r^2\pi + 2r\pi h \qquad Volumen = r^2\pi h = 1 \\
Fl\ddot{a}che =& 2r^2\pi + 2r\pi\frac{1}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{2}{r} \\
\frac{dFl\ddot{a}che}{dr} =& 4r\pi - \frac{2}{r^2} = 0 \\
r^3 =& \frac{1}{2\pi} \\
r =& \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \qquad h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}
\end{aligned}$$

2. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so wird eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ *Stammfunktion* von f genannt, wenn gilt: $F' = f$. Es wird in der Vorlesung gezeigt werden und darf für diese Aufgabe schon verwendet werden: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, so gilt für alle $a, b \in I$ mit $a < b$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

   (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung).

   a) Berechnen Sie die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen a und b mit Hilfe eines Integrals.

      Legen wir das Dreieck in die (x, y)-Ebene so, dass es sich zwischen $(0, 0)$, $(a, 0)$ (hier ist der rechte Winkel) und (a, b) erstreckt, dann besitzt es die Fläche, die zwischen dem Graphen von

$$y = \frac{b}{a}x$$

und der x-Achse in Grenzen 0 und a liegt. Diese ist gleich

$$\int_0^a \frac{b}{a} x dx = \frac{b}{2a} a^2 - \frac{b}{2a} 0^2 = \frac{ba}{2}.$$

b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$(\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x))' = \sqrt{1-x^2},$$

und berechnen Sie damit die Fläche des Halbkreises mit Radius 1.

$$\begin{aligned}(\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x))' =& \frac{1}{2}(\sqrt{1-x^2} + \frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) \\ =& \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Der Halbkreis mit Radius 1 und Mittelpunkt im Ursprung hat die Fläche, die zwischen dem Graphen von $y = \sqrt{1-x^2}$ und der x-Achse in den Grenzen -1 und 1 liegt. Sie ist gleich

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx =& \frac{1}{2}(1\sqrt{1-1^2} + \arcsin(1)) - \frac{1}{2}(-1\sqrt{1-(-1)^2} + \arcsin(-1)) \\ =& \frac{1}{2}(\arcsin(1)) - \frac{1}{2}(\arcsin(-1)) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

3. *(Staatsexamen Herbst 2005)*

a) Sei $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß F in 0 nicht differenzierbar ist.

b) Sei $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß F in 0 differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist.

(Hinweis: Bestimmen Sie die Ableitungen bei 0 mit Hilfe des Differentialquotienten.)

Es gilt, für $n = 1, 2$

$$F_n(x) := \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

auf Differenzierbarkeit im Punkt 0 zu überprüfen (außerhalb ist diese sowieso gegeben). Dazu betrachten wir den Differentialquotienten

$$\lim_{h\to 0} \frac{F_n(0+h) - F_n(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^n \sin(\frac{1}{h}) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h^{n-1} \sin(\frac{1}{h}).$$

Im Fall $n = 1$ nimmt die Funktion $h \mapsto \sin(\frac{1}{h})$ $(h \neq 0)$ in jeder Umgebung von 0 sowohl den Wert -1 als auch 1 an. Daher kann der $\lim_{h\to 0}$ nicht existieren. F_1 ist hier nicht differenzierbar.
Im Fall $n = 2$ dagegen gilt, $\lim_{h\to 0} h \sin(\frac{1}{h}) = 0$, also $F_2'(0) = 0$. Allerdings gilt für $x \neq 0$ für die Ableitung, $F_2'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$. Diese nimmt auch in jeder Umgebung von 0 Werte $< -\frac{1}{2}$ und $> \frac{1}{2}$ an, ist daher bei 0 nicht stetig.

4. *(Staatsexamen Herbst 1999)* Man zeige:

$$|\sin^3(x) + \cos(x) - \sin^3(y) - \cos(y)| \leq 4|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.)

Falls $x = y$, ist nichts zu zeigen. Der Mittelwertsatz garantiert die Existenz eines $x < \xi < y$ mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi).$$

Sei nun $f(x) := \sin^3(x) + \cos(x)$, so gilt $f'(x) := 3\sin^2(x)\cos(x) - \sin(x)$. Oben eingesetzt erhält man

$$\begin{aligned} \sin^3(y) + \cos(y) - \sin^3(x) - \cos(x) =& (3\sin^2(\xi)\cos(\xi) - \sin(\xi))(y - x) \\ \Rightarrow |\sin^3(y) + \cos(y) - \sin^3(x) - \cos(x)| =& |(3\sin^2(\xi)\cos(\xi) - \sin(\xi))||(y - x)|. \end{aligned}$$

Da sin und cos Werte zwischen -1 und 1 annehmen, nimmt $(3\sin^2(\xi)\cos(\xi) - \sin(\xi))$ Werte zwischen -4 und 4 an. Mit den Betragstrichen folgt die Behauptung.