MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 11
27.06.2007

Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung II (NV)

41. *(Staatsexamen Frühjahr 2000.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

   a) Besimmen Sie $f(\mathbb{R}^2)$.
   b) Sei $J(x, y)$ die Jacobi-Matrix von f in (x, y). Besimmen Sie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | J(x, y) \text{ ist invertierbar}\}.$$

   c) Ist f injektiv?

42. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch

$$F(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy)$$

definierte Abbildung.

   a) Man berechne die Funktionalmatrix von F und,
   b) wo sie existiert, ihre Inverse.

43. Gegeben sei die Funktion

$$f : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, \frac{\pi}{2}],\ f(x) := x \sin x.$$

   a) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt,
   b) skizzieren Sie f und f^{-1} und
   c) berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion ${f^{-1}}'(\frac{\pi}{2})$ an der Stelle $\frac{\pi}{2}$.

44. Gegeben sei die Funktion

$$F : [0, \infty[\times\mathbb{R} \to [0, \infty[\times\mathbb{R}, \qquad F(x, y) := (x^2, xy^3).$$

   a) Zeigen Sie, dass F umkehrbar ist mit Umkehrfunktion

$$F^{-1}(u, v) = (\sqrt{u}, \frac{\sqrt[3]{v}}{\sqrt[6]{u}}),$$

b) bestimmen Sie die Funktionalmatrix von F und wo sie existiert, ihre Inverse und

c) zeigen Sie, dass $F^{-1}(4,-2) = (2,-1)$, und dass für die Funktionalmatrix von F^{-1} im Punkt $(4,-2)$ gilt

$$DF^{-1}(4,-2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

ohne diese zu berechnen.

(Hinweis: Die Jacobi-Matrix und die Funktionalmatrix sind das gleiche.)

Jede Aufgabe zählt 4 Punkte.

Abgabe bis Mittwoch, den 04. Juli 2007, 11^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek oder in der Vorlesung).

Die Klausur findet am Mittwoch, den 04.07.2007, $11^{00} - 13^{00}$ Uhr im Hörsaal **B004** statt und betrifft den Vorlesungsstoff bis einschließlich Kapitel 3.11 bzw. Blatt 10.