MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 5
16.05.2007

Übungen zur Vorlesung
Differential– und Integralrechnung II (NV)

17. Man untersuche die folgenden Punktfolgen im $\mathbb{R}^2$ auf Konvergenz und gebe gegebenenfalls ihren Grenzwert an. Welche der Folgen besitzen Häufungspunkte?

    a) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k := \left(\frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{k}+1}, \frac{2k}{k^2+1}\right)$ für $k \in \mathbb{N}$,

    b) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k := \left(\cos\frac{k\pi}{2}, (-1)^k\frac{k}{k+1}\right)$ für $k \in \mathbb{N}$,

    c) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k := \left(\cos\frac{1}{k}, k\sin\frac{1}{k}\right)$ für $k \in \mathbb{N}$,

    d) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k := \left(k\cos\frac{1}{k}, \sin\frac{1}{k}\right)$ für $k \in \mathbb{N}$.

18. a) Gegben seien die Kurven $g, h : [0,\infty[\to \mathbb{R}^2$,

    $$g(t) := (t, e^t),$$

    $$h(t) := (t^2, e^{t^2}).$$

    Man skizziere g ung h, bestimme ihre Tangentialvektoren für $t = \frac{1}{2}$, 1, 2 und suche nach singulären Punkten.

    b) Es sei $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

    $$f(t) := (\sin(2t)\cos(t), \sin(2t)\sin(t)).$$

    Man skizziere die Kurve und zeige, dass $f|]0,\pi[$ injektiv und regulär ist.

19. *(Staatsexamen Herbst 2003.)* Seien p ein Punkt und M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Man beweise, dass auch $\{p + x | x \in M\}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

20. *(Staatsexamen Herbst 1994.)* Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Man zeige: Hat f keine Nullstelle, so hat für ein geeignetes $n_0 \in \mathbb{N}$ keine der Funktionen f_n mit $n \geq n_0$ eine Nullstelle.

Jede Aufgabe zählt 4 Punkte.

Abgabe bis Mittwoch, den 23. Mai 2007, 11^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek oder in der Vorlesung).