MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 4
09.05.2007

Übungen zur Vorlesung
Differential– und Integralrechnung II (NV)

13. Man untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen:

    a)
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k},$$

    b)
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

14. a) Man bestimme den maximalen Definitionsbereich $\mathbf{D}$ der Funktion

$$f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{x^3 + x^2 - x - 1}.$$

    b) Man bestimme reelle Zahlen A, B, C, so dass für alle reellen Zahlen $x \in \mathbf{D}$ gilt:

$$\frac{1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx}{(x+1)^2}.$$

    (Hinweis: Koeffizientenvergleich.)

    c) Man bestimme eine Stammfunktion $F : D \to \mathbb{R}$ der Funktion f.

15. Für $0 < x \in \mathbb{R}$ wird die *Gammafunktion* durch ein uneigentliches Integral definiert:

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

    a) Beweisen Sie, dass dieses uneigentliche Integral existiert (indem Sie für $t \searrow 0$ und $t \to \infty$ jeweils eine Majorante der Funktion $t^{x-1}e^{-t}$ angeben, deren unteigentliches Integral konvergiert).

    b) Beweise Sie die Funktionalgleichung der Gammafunktion

        i.
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad (x > 0)$$

        (Hinweis: Partielle Intergration),

ii.
$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$
(die Gammafunktion interpoliert also die Fakultät).

16. Beweisen oder widerlegen Sie:

    a) Die Abbildung
    $$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$
    definiert eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

    b) Die Abbildung
    $$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
    definiert eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$.

    c) Für eine (evtl. unendliche) Menge $\{X_i\}$ offener Teilmengen $X_i \subset \mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ ist ihre Vereinigung
    $$\bigcup_i X_i$$
    auch offen.

    d) Für eine (evtl. unendliche) Menge $\{X_i\}$ offener Teilmengen $X_i \subset \mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ ist ihr Durchschnitt
    $$\bigcap_i X_i$$
    auch offen.

Jede Aufgabe zählt 4 Punkte.

Abgabe bis Mittwoch, den 16. Mai 2007, 11^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).