MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 3
02.05.2007

# Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung II (NV)

9. *(Staatsexamen Frühjahr 2000.)* Man berechne eine Stammfunktion zu

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \cdot \ln(x)$$

für $x > 0$.

10. a) Bestimmen Sie Stammfunktionen zu $(\sin(x))^2$ $(x \in \mathbb{R})$ und $(\sin(x))^3$ $(x \in \mathbb{R})$.

b) *(Staatsexamen Frühjahr 2002.)* Sei $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion, und sei $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := (x - \frac{\pi}{2})f(\sin(x))$. Berechnen Sie $g(0)$, $g(\frac{\pi}{2})$ und $g(\pi)$, und untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von $g$ auf $[0,\pi]$. Beweisen Sie hiermit die Gleichheit

$$\int_0^\pi x f(\sin(x))dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin(x))dx,$$

und benutzen Sie dies zur Berechnung des Integrals $\int_0^\pi x(\sin(x))^2 dx$.

11. *(Staatsexamen Herbst 1999.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie unter Zuhilfenahme des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralechnung, dass für jede reelle Zahl $a$ gilt:

$$2\int_0^a \left(f(r)\left(\int_0^r f(s)ds\right)\right)dr = \left(\int_0^a f(t)dt\right)^2.$$

12. a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : ]0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ nicht gleichmäßig stetig auf $]0,1]$ ist.

b) *(Staatsexamen Herbst 2000.)* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion, für die gilt

$$\int_0^1 f^2(x)dx = 0.$$

Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

Jede Aufgabe zählt 4 Punkte.

**Abgabe** bis Mittwoch, den 09. Mai 2007, $11^{15}$ Uhr (Kästen vor der Bibliothek oder in der Vorlesung).