MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 1
18.04.2007

Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung II (NV)

1. *(Staatsexamen Frühjahr 2000)* Eine geschlossene kreisförmige Blechdose (= geschlossener Kreiszylinder mit Höhe h und Grundflächenradius r) mit dem Inhalt 1 Liter soll so konstruiert werden, dass der Materialverbrauch minimal ist.

   Wie müssen r und h gewählt werden?

2. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so wird eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ *Stammfunktion* von f genannt, wenn gilt: $F' = f$. Es wird in der Vorlesung gezeigt werden und darf für diese Aufgabe schon verwendet werden: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, so gilt für alle $a, b \in I$ mit $a < b$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

   .

   (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung).

   a) Berechnen Sie die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen a und b mit Hilfe eines Integrals.

   b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$(\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x))' = \sqrt{1-x^2},$$

   und berechnen Sie damit die Fläche des Halbkreises mit Radius 1.

3. *(Staatsexamen Herbst 2005)*

   a) Sei $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, daß F in 0 nicht differenzierbar ist.

   b) Sei $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, daß F in 0 differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist.

(Hinweis: Bestimmen Sie die Ableitungen bei 0 mit Hilfe des Differentialquotienten.)

4. *(Staatsexamen Herbst 1999)* Man zeige:

$$|\sin^3(x) + \cos(x) - \sin^3(y) - \cos(y)| \leq 4|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.)

Jede Aufgabe zählt 4 Punkte.

Abgabe bis Mittwoch, den 25. April 2007, 11^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek oder in der Vorlesung).