MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

WS 2006/07
Blatt 9
20.12.2006

# Übungen zur Vorlesung
# Differential– und Integralrechnung I (NV)
# Lösungsvorschlag

33. a) Dort wo der Nenner 0 wird kann man die Funktion natürlich nicht definieren, ansonsten gibt es keine Einschränkungen.

$$x^2 - 9 = 0 \iff x = \pm 3$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$.

b) Von nun an kann die gekürzte Version der Gleichung

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2-9} = \frac{(x-3)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}$$

betrachtet werden (die Erweiterung ist nur entscheidend für den Definitionsbereich). Für die Limiten gilt:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-3}{x+3} = \lim_{x \to \pm\infty} 1 + \frac{-6}{x+3} = 1,$$

$$\lim_{x \nearrow -3} \frac{x-3}{x+3} = \lim_{x \nearrow -3} \frac{-6}{x+3} = \infty,$$

$$\lim_{x \searrow -3} \frac{x-3}{x+3} = \lim_{x \searrow -3} \frac{-6}{x+3} = -\infty,$$

$$\lim_{x \nearrow 3} \frac{x-3}{x+3} = \lim_{x \nearrow 3} \frac{0}{6} = 0,$$

$$\lim_{x \searrow 3} \frac{x-3}{x+3} = \lim_{x \searrow 3} \frac{0}{6} = 0.$$

c) Zusammengesetzt aus elementaren Funktionen ist eine gebrochen rationale Funktion stetig.

34. Sowohl $x - |x|$ als auch $x^2$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, also auch ihre Einschränkungen. Zu untersuchen bleibt die Stelle $x = 0$. Hier gilt:

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} x^2 = 0 = 0 - |0| = f(0)$$

($= \lim_{x \nearrow 0} f(x)$ folgt aus der Stetigkeit von $x - |x|$.) Damit ist $f$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

35. a) $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 3 > 0$, deshalb folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz.

    b) Durch Intervallhalbierung wie im Beweis des Zwischenwertsatzes erhält man: $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{8} > 0$, eine Nullstelle liegt also in $[1, \frac{3}{2}]$, $f(\frac{5}{4}) = -\frac{39}{64} < 0$, eine Nullstelle liegt also in $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$.

36. Man schmeiße die stetige Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) := f(x) - g(x)$ in den Zwischenwertsatz: Es gilt $h(0) < 0$ und $h(1) > 0 \Longrightarrow$ es gibt ein $x_0 \in [0, 1]$ mit $h(x_0) = 0 \Longleftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$.