MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

WS 2006/07
Blatt 7
6.12.2006

Übungen zur Vorlesung
Differential– und Integralrechnung I (NV)
Lösungsvorschlag

25. a) Quotientenkriterium:

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = (\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

$$\leq^{Bernulli} \frac{1}{1+n\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

b) Quotientenkriterium:

$$\frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{(n+1)^3 2^n}{n^3 2^{n+1}} = \frac{(n+1)^3}{n^3 2} = \frac{1}{2}(\frac{n+1}{n})^3 \leq \frac{1}{2}\frac{125}{64} < 1$$

für $n \geq 4$.

c) Die Divergenz sieht man mit folgender Minorante:

$$\frac{n+3}{n^2-4n+4} = \frac{n+3}{(n-2)^2} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

d) Die Konvergenz sieht man mit folgender Majorante:

$$\frac{n^2+n}{n^4-11n^2+3} = \frac{(n-1)^2+3n-1}{(n-1)^4+\underbrace{4n^3-17n^2+4n+3}_{>0 \text{ für } n \geq 2}}$$

$$\leq \frac{(n-1)^2+3(n-1)+2}{(n-1)^4} = \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{3}{(n-1)^3} + \frac{2}{(n-1)^4}$$

26. a) Die Divergenz sieht man mit folgender Minorante:

$$\frac{1+n}{1+n^2} \geq \frac{1+n}{1+2n+n^2} = \frac{1+n}{(1+n)^2} = \frac{1}{1+n}$$

b) Die Divergenz sieht man mit folgender Minorante:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+11n+111}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+24n+144}} = \frac{1}{\sqrt{(n+12)^2}} = \frac{1}{n+12}$$

c)

$$\frac{1}{\sqrt[n]{3}} = \sqrt[n]{\frac{1}{3}} \geq \frac{1}{3},$$

daher ist $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{3}}$ nicht einmal Nullfolge.

d)

$$n \leq n+1 \Rightarrow \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

und $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, also haben wir eine monotone Nullfolge. Die Konvergenz folgt mit Leibnitz.

27.

$$a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

konvergieren nach 26.d),

$$a_n b_n = \frac{1}{n}$$

divergiert aber.

28. a) Nach dem Cauchykriterium gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} a_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $n_2 \geq n_1 \geq N$. Für $n_2 \geq 2N$ gilt dann wegen der Monotonie

$$\frac{n_2}{2} a_{n_2} \leq \sum_{n=\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor}^{n_2} a_{n_2} \leq \sum_{n=\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor}^{n_2} a_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

wobei $\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor$ die nächstkleinere ganze Zahl bedeutet, falls n_2 ungerade. Es gilt also

$$n_2 a_{n_2} < \varepsilon$$

für alle $n_2 \geq 2N$, und daher ist $(na_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

b) Die Folge

$$(\frac{1}{1}, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{9}, 0, \dots)$$

ist ≥ 0 und ihre Summe $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Multipliziert man sie gliedweise mit n, erhält man

$$(1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots),$$

also keine Nullfolge. Also kann nicht auf “monoton fallend“ verzichtet werden.