MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

WS 2006/07
Blatt 6
29.11.2006

Übungen zur Vorlesung
Differential– und Integralrechnung I (NV)
Lösungsvorschlag

21. Dies sieht man mit dem leibnitzschen Kriterium:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+2)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+4+\frac{4}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} = 0,$$

für $n \geq 2$ gilt:

$$n^2+n \geq 4 \Rightarrow n^3+6n^2+9n \geq n^3+5n^2+8n+4$$

$$\Rightarrow n(n+3)^2 \geq (n+2)^2(n+1) \Rightarrow \frac{n}{(n+2)^2} \geq \frac{n+1}{(n+3)^2},$$

und damit konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(n+2)^2}$.

22. a) $a_1 = 1 \leq 2$, $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2$.

    b) $1 \leq \sqrt{2} = \sqrt{1+1}$, $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \geq \sqrt{1+a_{n-1}} = a_n$.

    c) Nach oben beschränkt und monoton steigend konvergiert. Für den Limes gilt:

$$y := \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{1+a_n}) = \sqrt{1+\lim_{n\to\infty}(a_n)} = \sqrt{1+y}$$

$$\Rightarrow y^2 = 1+y \Rightarrow y^2-y+\frac{1}{4} = 1+\frac{1}{4} \Rightarrow (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow y-\frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$

wobei das – keinen Sinn macht, wegen $1-\sqrt{5} < 0$.

23. a) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergiert $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n| = 0 \Rightarrow$ es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodaß $|a_n| \leq 1$ für alle $n \geq N \Rightarrow |a_n|^p \leq |a_n|$ für alle $n \geq N$. Damit ist $\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|$ konvergente Majorante von $\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|^p \Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty}|a_n|^p$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=1}^{N-1}|a_n|^p + \sum_{n=N}^{\infty}|a_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p$ konvergiert (es werden ja nur endlich viele Folgeglieder hinzugefügt).

    b) Für $a_n := \frac{1}{n^2}$ und $p := 2$ gilt: $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert, aber $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[2]{|a_n|} = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert.

24. a) Da $(-1)^k \leq 1$ für alle $k \geq n$ und $1 \in \{(-1)^k | k \geq n\}$, gilt $\sup\{(-1)^k | k \geq n\} = 1$. Die Folge $(\sup\{(-1)^k | k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ heißt also $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, und ihren Limes ist natürich $= 1$.

b) $\frac{2n^2+3}{3n^2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{n^2} > \frac{2}{3}$, $\frac{1}{n} < \frac{2}{3}$ für alle $n \geq 2$. Daher genügt es, die erste Teilfolge zu betrachten:

$$\sup\{\frac{2}{3} + \frac{1}{k^2} | k \geq n\} = \frac{2}{3} + \frac{1}{n^2},$$

also gilt

$$\lim_{n\to\infty}\sup(\frac{2}{3} + \frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty}(\sup\{\frac{2}{3} + \frac{1}{k^2} | k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3} + \frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}} = \frac{2}{3}.$$