MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

WS 2006/07
Blatt 5
22.11.2006

Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung I (NV) Lösungsvorschlag

17.

$$\underbrace{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\dots}_{n\text{-mal}}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}^{i}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}^{i}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\frac{1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}^{n}}{1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\frac{1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}^{n}}{1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}\approx 3,8473$$

18.

- n gerade: $2+\frac{1}{n}+(-1)^n=3+\frac{1}{n}$, und $3<3+\frac{1}{n}\le 3,5$, wobei $3,5$ für $n=2$ erreicht wird,
- n ungerade: $2+\frac{1}{n}+(-1)^n=1+\frac{1}{n}$, und $1<1+\frac{1}{n}<2$, wobei die Folge $(1+\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ nach 1 konvergiert,
- $\Longrightarrow \sup M_1=\max M_1=3,5$, $\inf M_1=1$.

- $\frac{1-2^n}{(-2)^n}=(-1)^n\frac{1-2^n}{2^n}=(-1)^n(\frac{1}{2^n}-1)$
- n gerade: $(-1)^n(\frac{1}{2^n}-1)=1-\frac{1}{2^n}$, und $\frac{1}{2}\le 1-\frac{1}{2^n}<1$, wobei die Folge $(1-\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ nach 1 konvergiert,
- n ungerade: $(-1)^n(\frac{1}{2^n}-1)=\frac{1}{2^n}-1$, und $-1<\frac{1}{2^n}-1\le-\frac{3}{4}$, wobei die Folge $(\frac{1}{2^n}-1)_{n\in\mathbb{N}}$ nach -1 konvergiert,
- $\Longrightarrow \sup M_2=1$, $\inf M_2=-1$.

19. a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist strikt monoton steigend, denn

$$(n+1)^2>n^2$$

$$4(n+1)^2>4n^2$$

$$(n^2+4)(n+1)^2>n^2((n+1)^2+4)$$

$$\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+4}>\frac{n^2}{n^2+4},$$

und unter der 1 beschränkt, denn $n^2 < n^2+4 \Rightarrow \frac{n^2}{n^2+4} < 1$.
$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist strikt monoton fallend, denn

$$\begin{aligned} 0 &< 3n^2+n-1 \\ 3n^3+2n &< 3n^3+5n^2+n-1 \\ n^2(3(n+1)-1) &< (n+1)^2(3n-1) \\ \frac{3(n+1)-1}{(n+1)^2} &< \frac{3n-1}{n^2}, \end{aligned}$$

und über der 0 beschränkt, weil $3n-1>0$.
In beiden Fällen folgt daraus die Konvergenz, die Limiten 1 und 0 sind offensichtlich.

b)

$$\left|\frac{n^2}{n^2+4}-1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 1-\frac{n^2}{n^2+4} < \varepsilon \Leftrightarrow 4 < \varepsilon(n^2+4) \Leftrightarrow n^2 > \frac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow n > 2\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} > 0$$

$$\left|\frac{3n-1}{n^2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 3n-1 < \varepsilon n^2 \Leftrightarrow \varepsilon n^2-3n+1>0 \Leftarrow n > \frac{3}{\varepsilon}$$

20. a) Beweis durch vollst. Ind.: $a_0>0$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{x}{a_n})>0$.

b) Für $n\geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} (a_{n-1}^2-x)^2 &\geq 0 \\ (a_{n-1}^2+x)^2 &\geq 4xa_{n-1}^2 \\ \frac{a_{n-1}^2+x}{a_{n-1}} &\geq \frac{4xa_{n-1}}{a_{n-1}^2+x} \\ \frac{a_{n-1}^2+x}{a_{n-1}}-\frac{1}{2}\frac{a_{n-1}^2+x}{a_{n-1}} &\geq 2\frac{xa_{n-1}}{a_{n-1}^2+x} \\ \frac{1}{2}\frac{a_{n-1}^2+x}{a_{n-1}} &\geq \frac{1}{2}(\frac{a_{n-1}^2+x}{2a_{n-1}}+\frac{2xa_{n-1}}{a_{n-1}^2+x}) \\ \frac{1}{2}(a_{n-1}+\frac{x}{a_{n-1}}) &\geq \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(a_{n-1}+\frac{x}{a_{n-1}})+\frac{x}{\frac{1}{2}(a_{n-1}+\frac{x}{a_{n-1}})}) \\ a_n &\geq a_{n+1} \end{aligned}$$

c) Eine monoton fallende, nach unten beschränkte reelle Folge konvergiert.

$$y := \lim_{n\to\infty}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}(a_n+\frac{x}{a_n}))_{n\in\mathbb{N}}$$

$$= \frac{1}{2}(\lim_{n\to\infty}(a_n)_{n\in\mathbb{N}}+\frac{x}{\lim_{n\to\infty}(a_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \frac{1}{2}(y+\frac{x}{y}) \Rightarrow 2y^2=y^2+x \Rightarrow y^2=x$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = y = \sqrt{x}$$

($-\sqrt{x}$ macht keinen Sinn, weil $a_n>0$.)

d) Man sieht am Beispiel die hohe Geschwindigkeit der Konvergenz.