Übungen zur Vorlesung
Differential– und Integralrechnung I (NV)
Lösungsvorschlag

9. a) $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Für "=" ersetze man $\geq$ durch $=$ und beginne mit $a - b = 0 \Leftrightarrow ...$

   b)
$$1^2 = 1 \leq 2 = 2^1$$
$$2^2 \leq 2^2$$
   Anfang: $4^2 = 16 \leq 16 = 2^4$. Schritt: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq^{n.V.} 2 \cdot n^2 = n^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

   c) $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$. Nach dem archimedischen Axiom existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n > \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < x$.

10. a) 1. Fall $x \geq y$: $\max(x,y) = x = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$,
   2. Fall $x < y$: $\max(x,y) = y = \frac{1}{2}(x + y - (x - y)) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

   b) $\min(x,y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$, Beweis wie in a).

11. a) Kommutativgesetze: Beide Tabellen bleiben bei Spiegelung an der Diagonalen gleich. Negatives: In jeder Zeile bzw. Spalte der Additionstabelle steht (genau) eine 0. Inverses: In jeder außer der 0-Zeile bzw. -Spalte steht (genau) eine 1.

   b) $cb = c(1+c) = c \cdot 1 + cc = c + a = 1$, $bb = b(1+c) = b + bc = b + 1 = a \Rightarrow$

$\cdot$	0	1	a	b	c
0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	c
a	0	a	1	c	b
b	0	b	c	a	1
c	0	c	b	1	a

   c) Nein, denn wäre $\mathbb{F}_3$ angeordnet, würde (wie in jedem angeordneten Körper) gelten $0 < 1 \Rightarrow 0 < 1 < 1 + 1 = 2 < 2 + 1 = 0$, Widerspruch.

12. Zu zeigen: Zu $1 = \{a_1, ..., a_n\}$, $a_i \in \mathbb{N}$ existiert ein $1 \leq j \leq n$ mit $a_j < a_i$ für $i \in \{1, ..., n\} \backslash \{j\}$.
Induktion nach n, der Anzahl der Elemente von M.

$n = 1$: $M = \{a_1\}$ mit $a_1 \in \mathbb{N}$ und $a_1 < b$ für alle $b \in M \backslash \{a_1\} = \emptyset$.
$n \to n+1$: $M = \{a_1, ..., a_{n+1}\}$ $(n \geq 1)$, $M \backslash \{a_{n+1}\} = \{a_1, ..., a_n\}$ hat nach Voraussetzung ein kleinstes Element a_j $(1 \leq j \leq n)$ mit $a_j < a_i$ $(i \in \{1, ..., n\} \backslash \{j\})$.
1. Fall: $a_{n+1} > a_j \Rightarrow a_j < a_i$ $(i \in \{1, ..., n+1\} \backslash \{j\})$. 2. Fall: $a_{n+1} < a_j \Rightarrow a_{n+1} < a_j < a_i$ $(i \in \{1, ..., n\})$.