MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

WS 2006/07
Blatt ~~3~~ 2
1.11.2006

Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung I (NV) Lösungsvorschlag

9. a) Induktionsanfang $n = 0$: $2^3 + 5^2 = 8 + 25 = 33 = 11 \cdot 3$
Induktionsschritt $n \to n+1$:
Die Induktionsvoraussetzung heißt: $2^{4n+3} + 5^{2+n} = 11 \cdot m$ für ein ganzes m.

$$2^{4(n+1)+3} + 5^{2+(n+1)} = 16 \cdot 2^{4n+3} + 5 \cdot 5^{2+n} = 11 \cdot 2^{4n+3} + 5(2^{4n+3} + 5^{2+n})$$
$$\stackrel{n.V.}{=} 11 \cdot 2^{4n+3} + 5(11 \cdot m) = 11 \cdot (2^{4n+3} + 5m),$$

also durch 11 teilbar.

b) Induktion nach n für $n \geq k$:
Anfang: $n = k$ ist das kleinste zugelassene n:

$$\sum_{m=k}^{k} \binom{m}{k} = \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$$

Schritt:

$$\sum_{m=k}^{n+1} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k} + \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} \stackrel{n.V.}{=} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1}$$
$$= \binom{n+2}{k+1} = \binom{(n+1)+1}{k+1}$$

c) Anfang $N = 0$:

$$\sum_{n=1}^{0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0 = \sum_{n=1}^{0} \frac{1}{N+n}$$

Schritt $N \to N+1$:

$$\sum_{n=1}^{2(N+1)} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = -\frac{1}{2N+2} + \frac{1}{2N+1} + \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$\stackrel{n.V.}{=} -\frac{1}{2N+2} + \frac{1}{2N+1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N+n}$$

$$= -\frac{1}{2N+2} + \frac{1}{2N+1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(N+1)+(n-1)}$$

$$= -\frac{1}{2N+2} + \frac{1}{2N+1} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(N+1)+n}$$

$$= -\frac{1}{2N+2} + \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{(N+1)+0} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(N+1)+n}$$

$$= \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2N+2} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(N+1)+n}$$

$$= \frac{1}{(N+1)+N} + \frac{1}{(N+1)+(N+1)} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(N+1)+n}$$

$$= \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{(N+1)+n}$$

10. a)

$$(x+(y+z))^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (y+z)^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} y^j z^{n-i-j}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!} x^i y^j z^{n-i-j}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} x^i y^j z^{n-i-j}$$

Nun muß man die Doppelsumme umformen. Es gilt ja für einen Term $A(i,j,k)$:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} A(i,j,n-i-j) = \sum_{i+j+k=n} A(i,j,k) \qquad (i,j,k \geq 0).$$

Damit folgt

$$= \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

b)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} x^i y^{k-i}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \frac{y^{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} \frac{x^i}{i!} \frac{y^j}{j!} = \sum_{i+j \le n} \frac{x^i}{i!} \frac{y^j}{j!},$$

weil für einen Term $A(i,j)$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{k} A(i, k-i) = \sum_{i+j=k} A(i,j) \qquad (i,j \geq 0).$$

11. a) Auf der linken Seite steht das Negative von $(-x)$. Es ist nach Definition das Element y, das die Gleichung $(-x)+y=0$ erfüllt. Weil $(-x)+x=0$, folgt die Behauptung.

    b) Dies folgt mit dem Distributivgesetz: $x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, andererseit gilt: $x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0$. Daraus folgt die Behauptung.

    c) Entweder man sagt: Es gibt eine Abbilung $m'_x : K \to K$ mit $m'_x \circ m_x = Id_K$ (d.h. $m'_x(m_x(y)) = y$ für alle $y \in K$) und $m_x \circ m'_x = Id_K$. Nimmt man $m'_x := m_{x^{-1}}$, klappt das:

    $$m_{x^{-1}}(m_x(y)) = m_{x^{-1}}(yx) = yxx^{-1} = y$$

    und

    $$m_x(m_{x^{-1}}(y)) = m_{x^{-1}}(yx^{-1}) = yx^{-1}x = y$$

    für alle $y \in K$.
    Oder man sagt (nach dem d.h. der Aufgabe):
    Existenz: $m_x(zx^{-1}) = zx^{-1}x = z$ für alle $z \in K$.
    Eindeutigkeit: $m_x(y) = yx = z \Rightarrow y = zx^{-1}$.

    d) Fallunterscheidung: 1. Fall $x=0$, $x^2 = 0 \geq 0$. 2. Fall $x > 0$, $x^2 = x \cdot x > 0 \geq 0$. 3. Fall $x < 0$, $(-x) > 0$, $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0 \geq 0$.

12. Wie man leicht sieht, sind die Körperaxiome der Addition (für jedes d) erfüllt, weil sie auf ihre Entsprechungen im Grudkörper K zurückeführt werden können, (war nicht verlangt), hier z.B. das Kommutatigesetz:

    $$(x,y)+(u,v) = (x+u, y+v) = (u+x, v+y) = (u,v)+(x,y)$$

    Das negative ist $-(x,y) = (-x,-y)$.
    Kommutativ- und Assoziativgesetz der Multiplikation, sowie Eins und Distributivgesetz sind auch für jedes d erfüllt, Probleme können nur beim Inversen auftreten:
    Für gegebenes (x,y) ist (u,v) gesucht mit $(x,y) \cdot (u,v) = (1,0)$. Falls $y=0$, wähle $(u,v) = (\frac{1}{y}, 0)$, damit fertig. Im Folgenden sei also $y \neq 0$:

    $$(x,y) \cdot (u,v) = (\underbrace{xu + dyv}_{1}, \underbrace{xv + yu}_{0}) = (1,0)$$

also $xu + dyv = 1$ und $xv + yu = 0 \Rightarrow u = \frac{-xv}{y}$, $x\frac{-xv}{y} + dyv = 1 \Rightarrow v(\frac{-x^2}{y} + dy) = 1 \Rightarrow v(\frac{x^2-dy^2}{-y}) = 1$. Ist nun $x^2 - dy^2 \neq 0$, so können wir schreiben: $v = \frac{-y}{x^2-dy^2}$ und damit $u = \frac{x}{x^2-dy^2}$. Wir erhalten also

$$(u, v) = (\frac{x}{x^2 - dy^2}, \frac{-y}{x^2 - dy^2}),$$

und tatsächlich gilt

$$(x, y) \cdot (\frac{x}{x^2 - dy^2}, \frac{-y}{x^2 - dy^2}) = (1, 0).$$

Allerdings habe wir verwendet, daß $x^2 - dy^2 \neq 0$, ist d aber ein Quadrat in K, d.h., gibt es ein $e \in K$ mit $e^2 = d$, so gilt für $(x, y) = (e, 1)$, daß $x^2 - dy^2 = e^2 - d = 0$. Und andersherum folgt aus $x^2 - dy^2 = 0 \Rightarrow d = (\frac{x}{y})^2$, daß d als Quadrat geschrieben werden kann. Also sind alle Körperaxiome genau dann erfüllt, wenn d kein Quadrat ist.
Für $K = \mathbb{R}$ und $d = -1$ erhält man die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Naja, das stimmt natürlich nicht, und zwar liegt der Fehler im Fall $n = 2$: Man hat 2 Pferde $\{a, b\}$ und nimmt zunächst a weg, dann hat in der Restmenge $\{b\}$ natürlich jedes Pferd die gleiche Farbe. Nimmt man jetzt b weg, so hat in $\{a\}$ auch jedes Pferd die gleiche Farbe, weil aber in den Resten $\{b\}$ und $\{a\}$ kein Element gemeinsam ist (was ab 3 Elementen der Fall wäre), läßt sich nicht auf die Gleichheit der Farbe aller Elemente der Menge $\{a, b\}$ schließen...