Lösungen:

1. Man beweise durch vollständige Induktion:
   Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

   (a)
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   Induktionsanfang $n = 1$:
   Linke Seite: 1
   Rechte Seite: 1
   Induktionsschluß $n \to n+1$:
   Sei $n \in \mathbb{N}$.
   $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 =$
   $\sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 =$ (nach Induktionsvoraussetzung)
   $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$
   $\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} =$
   $\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} =$
   $\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} =$
   $\frac{(n+1)((n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

   (b)
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

   Induktionsanfang $n = 1$:
   Linke Seite: $\frac{1}{2}$
   Rechte Seite: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
   Induktionsschluß $n \to n+1$:
   Sei $n \in \mathbb{N}$.
   $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} =$ (nach Induktionsvoraussetzung)
   $1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$
   $1 + \frac{-(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} =$
   $1 - \frac{1}{n+2}$

   (c)
   $$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k$$

   Induktionsanfang $n = 1$:
   Linke Seite: 1
   Rechte Seite: 1
   Induktionsschluß $n \to n+1$:
   Sei $n \in \mathbb{N}$.
   $\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} k^2 =$
   $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+1-k} k^2 + (-1)^{n+1-(n+1)}(n+1)^2 =$
   $-\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^2 + (n+1)^2 =$ (nach Induktionsvoraussetzung)

$-\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)^2 =$
$-\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 =$
$\frac{(n+1)(-n+2(n+1))}{2} =$
$\frac{(n+1)(n+2)}{2} =$
$\sum_{k=1}^{n+1} k$

(6 Punkte)

2. Man berechne die folgenden Terme für kleine Werte von n, ermittle eine Formel für die Produktausdrücke und beweise die Formel durch vollständige Induktion:

(a)

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{k}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

a) $\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{\cancel{1}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \ldots \frac{n+1}{n} = n+1$

(Teleskop-Produkt)

Beweis. $n=1$: l.S. $= 1+1=2$ r.S. $=2$

$n \Rightarrow n+1$: $\prod_{k=1}^{n+1} \frac{k+1}{k} = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} \underset{\text{Ind.Vor.}}{=} (n+1) \cdot \frac{n+2}{n+1} = n+2$ ✓

(b)

$$\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2}) \qquad (n \geq 2)$$

(6 Punkte)

M1.2

b) $\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right) \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}$

$\underset{k=1}{=} \frac{1}{1+1} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right) \cdot \left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \frac{n-1}{n}\right\} \underset{\text{Aufg. a)}}{=} \frac{1}{2}(n+1) \frac{1}{n}$

5

Beweis. $n=2$: l.S. $= 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ r.S. $= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ ✓

$n \to n+1$: $\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$\underset{\text{Ind. Vor.}}{=} \frac{1}{2}(n+1)\frac{1}{n}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}$ ✓

3. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, daß beim Lotto „6 aus 49" die sechs gezogenen Zahlen

   (a) alle gerade,

   (b) alle ungerade

   sind. (6 Punkte)

Unter den Zahlen 1 – 49 gibt es $\frac{48}{2} = 24$ gerade Zahlen und 25 ungerade Zahlen (1 und 49 sind ungerade).

a) Anzahl von Möglichkeiten, 6 gerade Zahlen zu ziehen ist $\binom{24}{6} =: N_g$ (=Auswahl von 6 aus 24)

Gesamtzahl der Möglichkeiten, 6 (beliebige) Zahlen zu ziehen $= \binom{49}{6} =: N$

Wahrscheinlichkeit, 6 gerade Zahlen zu ziehen $= \frac{N_g}{N} = \binom{24}{6}\cdot\binom{49}{6}^{-1}$

Mit der Definition $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ folgt

$\frac{N_g}{N} = \frac{24!}{6!\,(24-6)!}\left(\frac{49!}{6!\,(49-6)!}\right)^{-1} = \frac{24!\ \ \cancel{6!}\ 43!}{\cancel{6!}\ 18!\ 49!} = \frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19}{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44} = 9.625\cdot 10^{-3}$

b) Anzahl von Möglichkeiten, 6 ungerade Zahlen zu ziehen ist $N_u := \binom{25}{6}$

zugehörige Wahrscheinlichkeit $= \frac{N_u}{N} = \binom{25}{6}\binom{49}{6}^{-1}$

$= \frac{25!}{6!(25-6)!}\left(\frac{49!}{6!43!}\right)^{-1} = \frac{25!}{6!19!}\cdot\frac{6!43!}{49!} = \frac{25\cdot24\cdot23\cdot22\cdot21\cdot20}{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44} = 1{,}266\cdot10^{-2}$

4. Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

(3 Punkte)

Die Aussage folgt auch direkt aus dem Binomialsatz mit $x = y = 1$. Der verlangte Beweis durch vollständige Induktion geht entsprechend wie der Beweis des Binomial-

$\binom{n}{0} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

$n=1$: l.S. $= \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$, r.S. $= 2^1 = 2$ ✓

$\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$ nach Vorlesung

$n \to n+1$: aus Vorlesung: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

damit $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{k=0} + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{k=n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} = 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}$

$= 1 + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k'=0}^{n-1}\binom{n}{k'} = 1 + 2^n + \sum_{k'=0}^{n}\binom{n}{k'} - \binom{n}{n} = 2^n + 2^n = 2\cdot2^n = 2^{n+1}$

$k-1 =: k'$ Ind Vor $k' = n$ Ind Vor