MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

WS 2006/07
2. Klausur
09.02.2007

2. Klausur zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung I (NV)

Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie auf alle Blätter Ihren Namen. Vielen Dank.

1. Zeigen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

   a)
$$\left(\frac{\sin(x)\cos(x)+x}{2}\right)' = \cos^2(x)$$

   und (Punkte: 2)

$$\left(\frac{\sin(x)\cos(x)+x}{2}\right)' = \frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)+1}{2} = \frac{2\cos^2(x)}{2} = \cos^2(x)$$

   b)
$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2(x) - \sin^2(y).$$

   (2)

$$\begin{aligned}
&\cos(x+y)\cos(x-y)\\
=&(\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y))(\cos(x)\cos(-y)-\sin(x)\sin(-y))\\
=&(\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y))(\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y))\\
=&(\cos(x)\cos(y))^2-(\sin(x)\sin(y))^2\\
=&\cos^2(x)(1-\sin^2(y))-(1-\cos^2(x))\sin^2(y))\\
=&\cos^2(x)-\cos^2(x)\sin^2(y)-\sin^2(y)+\cos^2(x)\sin^2(y)\\
=&\cos^2(x)-\sin^2(y)
\end{aligned}$$

2. Gegeben sei die Funktion

$$f :]0,\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

   a) Bestimmen Sie den Wertebereich $\mathbb{W}_f$ von f, (2)
   f steigt strikt monoton, denn:

$$\begin{aligned}
0 < x &< y\\
-\frac{1}{x} &< -\frac{1}{y}\\
e^{-\frac{1}{x}} &< e^{-\frac{1}{y}},
\end{aligned}$$

und

$$\lim_{x\searrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\nearrow 0} e^{x} = 1.$$

Daraus folgt: $\mathbb{W}_f =]0,1[$.

b) zeigen Sie, dass f umkehrbar ist, und geben Sie die Umkehrfunktion f^{-1} an. (2)

Die Umkehrbarkeit folgt aus der strikten Monotonie, und für f^{-1} gilt:

$$\begin{aligned} x &= e^{-\frac{1}{y}} \\ \ln(x) &= -\frac{1}{y} \\ -\frac{1}{\ln(x)} &= y, \end{aligned}$$

also $f^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = -\frac{1}{\ln(x)}$.

3. Gegeben sei die Funktion

$$f :]0,\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x + \ln(x).$$

Zeigen Sie:

a) f hat genau eine Nullstelle, (2)
f ist als Summe zweier strikt monoton steigender Funktionen strikt monoton steigend. Die Behauptung folgt dann mit dem Zwischenwertsatz aus

$$f(e^{-1}) = \frac{1}{e} - 1 < 0 < 1 = f(1).$$

b) f besitzt eine differezierbare Umkehrfunktion (nicht angeben). (2)
Die Existenz der Umkehrfunktion folgt auch hier aus der strikten Monotonie. Dass diese differenzierbar ist, folgt daraus, dass die Ableitung

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$$

für $x > 0$ nirgends 0 ist.

4. Gegeben sei für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^n e^{-x}.$$

a) Zeigen Sie, dass für die Ableitung gilt:

$$f'(x) = (n - x)x^{n-1}e^{-x},$$

(2)

$$f'(x) = nx^{n-1}e^{-x} + x^n e^{-x}(-1) = (n - x)x^{n-1}e^{-x}$$

b) zeigen Sie, dass f bei $x = n$ ein Maximum besitzt, und (2)
Dies folgt aus $f'(n) = 0$ und der Tatsache, dass

$$f'(x) = (n - x)x^{n-1}e^{-x} > 0 \text{ für } 0 < x < n,$$
$$f'(x) = (n - x)x^{n-1}e^{-x} < 0 \text{ für } n < x < \infty$$

($x^{n-1}e^{-x}$ ist stets positiv), weil f demnach links von n s.m. steigt und rechts von n s.m. fällt.

c) bestimmen Sie den Wertebereich $\mathbb{W}_f$ von f in Abhängigkeit von n. (2)

$$\lim_{x \searrow 0} x^n e^{-x} = 0,$$
$$\lim_{x \to \infty} x^n e^{-x} = 0.$$

Daher ist

$$\mathbb{W}_f =]0, f(n) = n^n e^{-n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n].$$

5. a) Formulieren Sie die Formel zur Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(f^{-1})'(y_0) = .$$

Welche Bedingung muß f' erfüllen? (2)

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

f' darf nicht 0 sein.

b) Berechnen Sie mit dieser Formel die Ableitung des Logarithmus

$$\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}.$$

(2)

ln ist die Umkerhfunktion zur e-Funktion, also folgt mit $f(x) = e^x = f'(x)$:

$$\ln'(y_0) = (e^{-1})'(y_0) = \frac{1}{e^{e^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{e^{\ln(y_0)}} = \frac{1}{y_0}.$$

6. Seien $-\frac{\pi}{2} \le a < b \le \frac{\pi}{2}$. Zeigen Sie:

$$(b-a)\sin(a) < \cos(a) - \cos(b) < (b-a)\sin(b).$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.) (2)
Wir wenden den Mittelwertsatz auf die Funktion $\cos : [a, b] \to \mathbb{R}$ an (die Voraussetzungen sind erfüllt, weil cos differenzierbar ist). Er besagt, dass es ein $a < \xi < b$ gibt mit

$$\begin{aligned} -\sin(\xi) = \cos'(\xi) &= \frac{\cos(b) - \cos(a)}{b-a} \\ \Longrightarrow -(b-a)\sin(\xi) &= \cos(b) - \cos(a) \\ (b-a)\sin(\xi) &= \cos(a) - \cos(b). \end{aligned}$$

Weil

$$-\frac{\pi}{2} \le a < \xi < b \le \frac{\pi}{2}$$

(a, ξ und b liegen also in einem Bereich, in dem der sin strikt monoton steigt), gilt:

$$\sin(a) < \sin(\xi) < \sin(b)$$

$$\Longrightarrow (b-a)\sin(a) < (b-a)\sin(\xi) = \cos(a)-\cos(b) = (b-a)\sin(\xi) < (b-a)\sin(b).$$

7. Berechnen Sie $a_0, \dots, a_4 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x^4 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + a_3(x+1)^3 + a_4(x+1)^4.$$

(2)
Die 1. Möglichkeit ist mit dem Binomialsatz und einer Substitution $z := x + 1$:

$$(z-1)^4 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4,$$

und weil

$$(z-1)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} z^k (-1)^{4-k} = 1 - 4z + 6z^2 - 4z^3 + 1z^4$$

folgt:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= -4, \\ a_2 &= 6, \\ a_3 &= -4, \\ a_4 &= 1. \end{aligned}$$

Die 2. Möglichkeit ist mit der Taylor-Formel: Sie wird auf

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^4$$

angewandt ($f \in C^\infty$) mit Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ und sagt, dass es ein ξ zwischen x_0 und x gibt, so dass

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{f(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \\ & + \frac{f''''(\xi)}{4!}(x-x_0)^4. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3, \\ f''(x) &= 12x^2, \\ f'''(x) &= 24x, \\ f''''(x) &= 24. \end{aligned}$$

Oben eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} x^4 = {} & \frac{(-1)^4}{0!}(x+1)^0 + \frac{4(-1)^3}{1!}(x+1)^1 + \frac{12(-1)^2}{2!}(x+1)^2 + \frac{24(-1)}{3!}(x+1)^3 \\ & + \frac{24}{4!}(x+1)^4 \\ = {} & \frac{1}{1}(x+1)^0 + \frac{-4}{1}(x+1)^1 + \frac{12}{2}(x+1)^2 + \frac{-24}{6}(x+1)^3 + \frac{24}{24}(x+1)^4 \\ = {} & 1 - 4(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4. \end{aligned}$$

Viel Erfolg und schöne Ferien!