MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

WS 2006/07
1. Klausur
22.12.2006

1. Klausur zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung I (NV) + Lösungsvorschlag

Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie auf alle Blätter Ihren Namen. Vielen Dank.

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k!k = (n+1)! - 1.$$

(Punkte: 2)

Anfang:

$$\sum_{k=1}^{1} k!k = 1 = 2 - 1 = (1+1)! - 1$$

Schritt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k!k = (n+1)!(n+1) + \sum_{k=1}^{n} k!k =^{\text{Voraussetzung}} (n+1)!(n+1) + (n+1)! - 1$$

$$= (n+1)!(n+1+1) - 1 = (n+2)! - 1$$

2. Formulieren Sie

   a) den binomischen Lehrsatz (ohne Beweis) und (2)

   b) die Definition für die Konvergenz einer reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach einem Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. (2)

   a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

   b) für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

3. a) Formulieren Sie das Quotientenkriterium für eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (ohne Beweis). (2)

b) Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Konvergenz der Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

(2)

c) Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}.$$

(2)

a) (Voraussetzung: $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.) Gibt es ein $c < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq c < 1$$

für alle $n \geq n_0$, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut (dabei muß c unabhängig von n sein).

b) Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \left| \frac{x}{(n+1)} \right| = \frac{|x|}{(n+1)} \leq \frac{1}{2} < 1$$

für $n \geq n_0 := 2|x| - 1$. Daher konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (absolut).

c) Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} \right| = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \frac{1}{3}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \frac{1}{3} \leq \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{1}{3} = \frac{3}{4} < 1$$

für $n \geq n_0 := 2$. Daher konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.

4. Für $x \in \mathbb{R}$ sei die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie für $|x| < 1$ ihre Konvergenz. (2)

b) Untersuchen Sie die Konvergenz für $x = 1$. (2)

c) Untersuchen Sie die Konvergenz für $x = -1$. (2)

(Bitte begründen Sie ihre Antworten.)

a) Majorantenkriterium:

$$\left|\frac{x^n}{n+1}\right| \leq |x^n| = |x|^n,$$

und weil $0 \leq |x| < 1$, konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n$, also konvergiert die Minorante $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ (absolut).

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ konvergiert nach dem Leinitzkriterium, weil $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

5. Sei

$$z := \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}.$$

a) Zeigen Sie:

$$z^{-1} = \bar{z} \qquad \text{und} \qquad z^2 = -\bar{z}.$$

(2)

b) Berechnen Sie

$$z^3 \qquad \text{und} \qquad z^{2007}.$$

(2)

6. a)

$$z^{-1} = \frac{2}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{2(1-i\sqrt{3})}{1-3i^2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \bar{z},$$

$$z^2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1+2i\sqrt{3}+3i^2}{4} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\bar{z},$$

b)

$$z^3 = zz^2 = -z\bar{z} = -\frac{1-3i^2}{4} = -1,$$

$$z^{2007} = z^{3\cdot 669} = (z^3)^{669} = (-1)^{669} = -1.$$

7. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei folgendermaßen definiert:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+5}{2x^2+5} & \text{falls } x < 0, \\ e^x & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und (2)

b) geben Sie

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)$$

an. (2)

(Die Stetigkeit der e-Funktion darf ohne Beweis verwendet werden.)

8. a) Sowohl $x \mapsto \frac{x^2-3x+5}{2x^2+5}$ als auch $x \mapsto e^x$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, also auch ihre Einschränkungen. Zu üeberprüfen ist die Anschlussstelle $x = 0$. Hier gilt

$$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0} \frac{x^2-3x+5}{2x^2+5} = \frac{0-0+5}{0+5} = 1 = e^0 = f(0)$$

$(= e^0 = \lim_{x\searrow 0} e^x = \lim_{x\searrow 0} f(x)$, wie aus der Stetigkeit der e-Funktion folgt). Also ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

b)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x+5}{2x^2+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{5}{x^2}} = \frac{1-0+0}{2+0} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty.$$

Viel Erfolg und schöne Weihnachten!