Übungen zur Vorlesung Differential- und Integralrechnung I (NV)

37. Für $a > 0$ sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folgendermaßen definiert:

$$f(x) := \begin{cases} -(x+1)^2 + a + 1 & \text{falls } x \leq -1, \\ a(x+1)^2 + a + 1 & \text{falls } x > -1. \end{cases}$$

- a) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit,
b) geben Sie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

sowie den Wertebereich W_f von f an,

- c) zeigen Sie, dass f umkehrbar ist und geben Sie die Umkehrfunktion f^{-1} explizit an.

6 Punkte

38. Die Funktionen Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus sind folgendermaßen definiert:

$$\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

$$\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Zeigen Sie, dass

- a) i. $\sinh$ strikt monoton steigt,
ii. die Einschränkung auf $[0, \infty[$ $\cosh|_{[0, \infty[}$ strikt monoton steigt,
b) i. $\sinh$ $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet,
ii. $\cosh|_{[0, \infty[}$ $[0, \infty[$ bijektiv auf $[1, \infty[$ abbildet,
c) für die Umkehrfunktionen gilt:

i.

$$\sinh^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

ii.

$$\cosh^{-1}|_{[0, \infty[} : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[, \quad x \mapsto \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

8 Punkte

39. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass für

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \cdot f(x)$$

gilt: g ist stetig im Punkt $x = 0$.

3 Punkte

40. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die der Funktionalgleichung

$$f(x + y) = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

genügt. Zeigen Sie:

- a) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- b) aus $f(1) = 0$ folgt schon $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei nun $f(1) =: a > 0$.

- c) Berechnen Sie $f(0)$,
- d) zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $f(n) = a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

4 Punkte

Wer noch Lust hat, kann sich über Punktsymmetrien Gedanken machen: Wie wir wissen, ist der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ punktsymmetrisch zum Ursprung, falls

$$f(-x) = -f(x)$$

gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. Welche Gleichung muß erfüllt sein, damit eine Symmetrie zu einem beliebigen Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vorliegt?

0 Punkte

Abgabe bis Mittwoch, den 10. Januar 2007, 11¹⁵ Uhr (Kästen vor der Bibliothek oder in der Vorlesung).

Übungen Alexander Böhm, Mittwoch 13⁰⁰ Uhr, B040,
Volker Wittmann, Mittwoch 16¹⁵ Uhr, B004,
Daniel Bembé, Freitag 9¹⁵ Uhr, B004,
Sprechstunden jeweils nach den Übungen,
Sprechstunde Prof. Kraus Mittwoch und Freitag 13¹⁵ Uhr, 401.

Viel Spaß und schöne Ferien!