MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

WS 2006/07
Blatt 6
22.11.2006

Übungen zur Vorlesung
Differential– und Integralrechnung I (NV)

21. Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{(n+2)^2}$$

4 Punkte

22. Untersuchen Sie

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}},$$

also den Grenzwert der durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \sqrt{1+a_n}$ ($n \in \mathbb{N}$) rekursiv definierten Folge, indem Sie

a) mittels vollständiger Induktion zeigen, daß $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

b) mittels vollständiger Induktion zeigen, daß $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

c) daraus die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgern und ihren Grenzwert berechnen.

6 Punkte

23. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe.

a) Zeigen Sie: ist $p \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, so konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p,$$

(Hinweis: bedenken Sie, daß $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, und verwenden Sie das Majorantenkriterium)

b) widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel: Ist $p \in \mathbb{N}$, so konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[p]{|a_n|}.$$

5 Punkte

24. Der Limes superior einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert durch

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geq n} a_k).$$

Bestimmen Sie den Limes superior der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für

a)

$$a_n := (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

b)

$$a_n := \begin{cases} \frac{2n^2+3}{3n^2} & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{n} & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ gerade.} \end{cases}$$

6 Punkte

Abgabe bis Mittwoch, den 29. November 2006, 11^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek oder in der Vorlesung).

Übungen Alexander Böhm, Mittwoch 13^{00} Uhr, B040,
Volker Wittmann, Mittwoch 16^{15} Uhr, B004,
Daniel Bembé, Freitag 9^{15} Uhr, B004,
Sprechstunden jeweils nach den Übungen,
Sprechstunde Prof. Kraus Mittwoch und Freitag 13^{15} Uhr, 401.