

Übungen zur Vorlesung Differential- und Integralrechnung I (NV)

17. Man habe 1 m^3 Ton zur Verfügung, nehme davon die Hälfte weg und forme aus ihr einen Würfel. Die übergebliebene Hälfte halbiere man wieder und forme aus ihrer Hälfte einen weiteren Würfel usw. Dies mache man n -mal und stelle die so entstandenen n Würfel Seitenfläche an Seitenfläche nebeneinander auf. Wie lang ist die so entstandene Würfelreihe? Welche Länge erhält man für $n \rightarrow \infty$?

4 Punkte

18. Berechnen Sie für folgende Mengen das Supremum und das Infimum:

$$M_1 := \left\{ 2 + \frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad M_2 := \left\{ \frac{1 - 2^n}{(-2)^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

4 Punkte

19. Die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen seien definiert wie folgt:

$$a_n := \frac{n^2}{n^2 + 4}, \quad b_n := \frac{3n - 1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- a) Untersuchen Sie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit.
b) Zeigen sie anhand der Definition die Konvergenz von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d.h. geben Sie z.B. für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ an mit $|a_n - a| < \epsilon$ für $n \geq N$.

4 Punkte

20. Berechnung der Quadratwurzel nach Newton: Sei $x \in \mathbb{R}_+$ eine positive reelle Zahl. Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ sei folgendermaßen rekursiv definiert:

$$a_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{beliebig,}$$

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{x}{a_n} \right) \quad (n \geq 0).$$

- a) Zeigen Sie, daß für alle $n \geq 0$ gilt: $a_n > 0$.
b) Zeigen Sie, daß für $n \geq 1$ gilt:

$$a_{n+1} \leq a_n.$$

- c) Folgern sie daraus die Konvergenz von $(a_n)_{n \geq 0}$ und berechnen Sie den $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)_{n \geq 0}$.
- d) Berechnen Sie für $1 \neq x, a_0 \in \mathbb{R}_+$ Ihrer Wahl die ersten fünf Folgglieder von $(a_n)_{n \geq 0}$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

5 Punkte

Abgabe bis Mittwoch, den 15. November 2006, 11¹⁵ Uhr (Kästen vor der Bibliothek oder in der Vorlesung).

Übungen Alexander Böhm, Mittwoch 13⁰⁰ Uhr, B040,
Volker Wittmann, Mittwoch 16¹⁵ Uhr, B004,
Daniel Bembé, Freitag 9¹⁵ Uhr, B004,
Sprechstunden jeweils nach den Übungen,
Sprechstunde Prof. Kraus Mittwoch und Freitag 13¹⁵ Uhr, 401.