

Übungen zur Vorlesung Differential- und Integralrechnung I (NV)

13. Man zeige, dass für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a)

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!} \quad \text{für alle } k \geq 0,$$

b)

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad (\text{mit Hilfe von a}).$$

(5 Punkte)

14. Man berechne $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ für

a)

$$a_n = \frac{23n^2 + 2n - 3}{11n^2 + 12} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

b)

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(4 Punkte)

15. Man gebe jeweils Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen an mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

so dass jeder der folgenden Fälle eintritt:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = +\infty,$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = -\infty,$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = c$ für ein vorgegebenes $c \in \mathbb{R},$

d) die Folge $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt aber nicht konvergent.

(8 Punkte)

16. Zeigen oder widerlegen Sie, dass für eine konvergente reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{R}$ und die Folge $(a_n - a)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt:

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0,$$

b)

$$a_n > a \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > a.$$

(4 Punkte)

Abgabe bis Mittwoch, den 15. November 2006, 11¹⁵ Uhr (Kästen vor der Bibliothek oder in der Vorlesung).

Übungen Alexander Böhm, Mittwoch 13⁰⁰ Uhr, B040,
Volker Wittmann, Mittwoch 16¹⁵ Uhr, B004,
Daniel Bembé, Freitag 9¹⁵ Uhr, B004,
Sprechstunden jeweils nach den Übungen,
Sprechstunde Prof. Kraus, Mittwoch und Freitag 13¹⁵ Uhr, 401.