

Übungen zur Vorlesung Differential- und Integralrechnung I (NV)

9. Zeigen Sie:

a) Für $a, b \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a = b$.

b) Für jede natürliche Zahl $n \neq 3$ gilt:

$$n^2 \leq 2^n$$

c) Für jede positive reelle Zahl $x \in \mathbb{R}_+$ existiert ein natürliches $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{n} < x$$

(6 Punkte)

10. Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ bezeichnen $\max(x, y)$ die größere und $\min(x, y)$ die kleinere der beiden Zahlen x, y .

a) Zeigen Sie:

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

b) Stellen Sie eine ähnliche Formel für $\min(x, y)$ auf und beweisen Sie sie.

(6 Punkte)

11. Zu jeder Primzahl p gibt es einen Körper $\mathbb{F}_p$ mit p Elementen.

a) Für $p = 3$ bestehe $\mathbb{F}_3$ aus den Elementen $\{0, 1, 2\}$ (Nullelement 0, Einselement 1) und habe die Additions- und Multiplikationstabellen

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Beschreiben Sie, wie man an den Tabellen die Kommutativgesetze, sowie die Existenz des Negativen und des Inversen sieht!

- b) Für $p = 5$ bestehe $\mathbb{F}_5$ aus den Elementen $\{0, 1, a, b, c\}$ (Nullelement 0, Einselement 1). Seine Additionstabelle ist gegeben, bitte vervollständigen Sie die Multiplikationstabelle (z. B. mit Hilfe des Distributivgesetzes):

$+$	0	1	a	b	c	$\cdot$	0	1	a	b	c
0	0	1	a	b	c	0	0	0	0	0	0
1	1	c	0	a	b	1	0	1	a	b	c
a	a	0	b	c	1	a	0	a			
b	b	a	c	1	0	b	0	b			
c	c	b	1	0	a	c	0	c		a	

(Geben Sie bitte an, wie Sie auf das Ergebnis kommen.)

- c) Beweisen oder widerlegen Sie: $\mathbb{F}_3$ läßt sich zu einem angeordneten Körper machen.

(5 Punkte)

12. Gegeben sei eine Menge $M \subset \mathbb{N}$ natürlicher Zahlen mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen. Zeigen Sie: Für jedes n hat M ein kleinstes Element.

(4 Punkte)

Abgabe bis Mittwoch, den 8. November 2006, 11¹⁵ Uhr (Kästen vor der Bibliothek oder in der Vorlesung).

Übungen Alexander Böhm, Mittwoch 13⁰⁰ Uhr, B040,
 Volker Wittmann, Mittwoch 16¹⁵ Uhr, B004,
 Daniel Bembé, Freitag 9¹⁵ Uhr, B004,
 Sprechstunden jeweils nach den Übungen.
 Sprechstunde Prof. Kraus Mittwoch und Freitag 13¹⁵ Uhr, Zimmer 401.