Mathematisches Institut
der Universität München

LMU
Ludwig–Maximilians–Universität München

Professor Dr. Günther Kraus
Mathematisches Institut, Theresienstraße 39, D–80333 München

Übungen zur Vorlesung
Differential- und Integralrechnung I (Kraus)
Wintersemester 2006/07, Blatt 2

5. Man beweise durch vollständige Induktion:

   (a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist 11 ein Teiler von $2^{4n+3} + 5^{2+n}$.

   (b) Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ gilt

   $$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

   (c) Für alle $N \in \mathbb{N}_0$ gilt

   $$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N+n}.$$

(6 Punkte)

6. Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Man beweise

   (a)

   $$(x+y+z)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1!\, k_2!\, k_3!}\, x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}.$$

   Dabei wird über alle Tripel $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ summiert, für die $k_1 + k_2 + k_3 = n$.

   (b)

   $$\sum_{i+j \leq n} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^j}{j!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x+y)^k}{k!}.$$

   Dabei wird über alle Paare $(i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ summiert, für die $i + j \leq n$.

(6 Punkte)

7. Seien K ein angeordneter Körper und $x \in K$. Zeigen Sie:

   (a)

   $$-(-x) = x$$

   (b)

   $$x \cdot 0 = 0$$

0

Haus– und Postanschrift:
Theresienstraße 39
D–80333 München

Telefon: 0 89 / 2180 - 4402
Telefax: 0 89 / 280 52 48
Telex: 5 29 815 UNIVM D
email: kraus@rz.mathematik.uni-muenchen.de

Straßenbahn
Linie 27
Haltestelle Pinakothek

(c) Falls $x \neq 0$, ist
$$m_x : K \to K,\ y \mapsto y \cdot x$$
eine Bijektion (d.h.: Für jedes $z \in K$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $y \in K$ mit $m_x(y) = z$).

(d)
$$x^2 \geq 0$$

(4 Punkte)

8. Seien K ein Körper und $d \in K$. Auf $K \times K$ werde für alle $x, y, u, v \in K$ definiert:
$$(x, y) + (u, v) := (x + u,\ y + v),$$
$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu + dyv,\ xv + yu).$$
Für welche d ist $K \times K$ mit diesen Verknüpfungen und $(0, 0)$ als Nullelement sowie (1,0) als Einselement ein Körper?
Welcher bekannte Körper ergibt sich für $K = \mathbb{R}$ und $d = -1$?

(5 Punkte)

Zum Vergnügen die Pferdeaufgabe:
Jemand möchte zeigen, daß alle Pferde der Welt die gleiche Farbe haben, indem er die Aussage $A(n)$: „Je n Pferde haben die gleiche Farbe“ mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ nachweist. Er argumentiert dabei wir folgt:

— Der Induktionsanfang „$n = 1$“ für ein Pferd ist klar.

— Für den Induktionsschritt „$n \to n + 1$“ seien $n + 1$ Pferde gegben. Man nehme ein Pferd weg; die verbleibenden n Pferde haben nach Induktionsvoraussetzung die gleiche Farbe. Man füge das Pferd wieder hinzu und entferne ein anderes Pferd; und wieder haben die restlichen n Pferde die gleiche Farbe. Somit haben aber alle $n + 1$ Pferde die gleiche Farbe...

Stimmt das?

(0 Punkte)

Abgabe: Freitag, 3.11.2006, 11.15 h, gekennzeichneter Übungskasten vor der Bibliothek (oder in der Vorlesung).