Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Klausuraufgaben

Aufgabe K.1

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Ereignisraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Partition von Ω, also $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$ und $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$. Setze $\mathcal{F} = \sigma(\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$. Zeigen Sie, dass sich alle Elemente in $B \in \mathcal{F}$ als abzählbare Vereinigungen von Elementen aus $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ schreiben lassen.

Lösungsskizze. Wir benutzen das Prinzip der guten Mengen und zeigen zunächst, dass $\mathcal{G} = \{\cup_{i\in\mathcal{I}} A_i : \mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}\}$ eine σ-Algebra ist.
Klarerweise sind $\emptyset, \Omega \in \mathcal{G}$. Da $(\cup_{i\in\mathcal{I}} A_i)^c = \cup_{i\in\mathbb{N}\setminus\mathcal{I}} A_i$, ist $\mathcal{G}$ auch abgeschlossen unter Komplementbildung. Die Abgeschlossenheit unter abzählbaren Vereinigungen folgt direkt aus der Definition von $\mathcal{G}$.
Aus der Konstruktion ist $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Da $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{G}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir weiter

$$\mathcal{F} = \sigma(\{A_n : n \in \mathbb{N}\}) \subseteq \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{G}.$$

Aufgabe K.2

Sei X eine Zufallsvariable.

(a) Zeigen Sie
$$-\infty < \mathbb{E}[X] < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}_0} P(|X| > n) < \infty.$$

(b) *Bonusaufgabe:* Seien $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, identisch verteilte und Zufallsvariablen. Zeigen Sie
$$P(|Y_n| > n \text{ für unendlich viele } n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}[|Y_1|] < \infty.$$

Lösungsskizze.

(a) „$\Rightarrow$“ Sei zuerst $X \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty P(X > x)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^\infty P(X > \lceil x \rceil)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} \int_n^{n+1} P(X > n+1)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n\geq 1} P(X > n).\end{aligned}$$

Der Summand für $n = 0$ ändert an der Endlichkeit der Reihe nichts. Für allgemeines X können wir obige Beobachtung auf X^+ und X^- anwenden und erhalten

$$\sum_{n\geq 0} P(|X| > n) \leq \sum_{n\geq 0} P(X^+ > n) + \sum_{n\geq 0} P(X^- > n) < \infty.$$

„$\Leftarrow$" Hier gilt

$$\sum_{n\geq 0} P(|X|>n) = \int_0^\infty P(|X| > \lfloor x \rfloor)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^\infty P(|X|>x)\,\mathrm{d}x = \mathbb{E}[|X|] \geq \pm\mathbb{E}[X].$$

(b) „$\Rightarrow$" Betrachte die Summe $\sum_{n\geq 1} P(|Y_1| > n) = \sum_{n\geq 1} P(|Y_n| > n)$. Dann ist diese Summe endlich, andernfalls erhalten wir mit Borel-Cantelli 2) einen Widerspruch zur Annahme. Die Behauptung folgt aus (a) mit $X = |Y_1|$.

„$\Leftarrow$" Mit (a) gilt $\sum_{n\geq 1} P(|Y_n| > n) = \sum_{n\geq 1} P(|Y_1| > n) < \infty$ und das Resultat folgt mit Borel-Cantelli 1).

Aufgabe K.3

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ für $\lambda > 0$, d.h. X_1 hat die Lebesgue-Dichte $f_{X_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x}\,\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}$. Bestimmen Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass die Folge von Zufallsvariablen

$$M_n = (\max_{k\leq n} X_k) - a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

in Verteilung gegen eine nichttriviale Zufallsvariable Z konvergiert, und bestimmen Sie die Verteilung von Z.

Lösungsskizze. Es gilt

$$P(\max\{X_1,\dots,X_n\} \leq c) = (1-e^{-\lambda c})^n.$$

Wir setzen $a_n = \frac{\log n}{\lambda}$ und erhalten

$$\begin{aligned} P(M_n \leq z) &= P(\max\{X_1,\dots,X_n\} \leq \lambda^{-1}\log n + z) \\ &= \left(1 - \exp\left\{(-\lambda\left(\frac{\log n}{\lambda} + z\right)\right\}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\cdot e^{-\lambda z}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-e^{-\lambda z}}. \end{aligned}$$

Man rechnet nach, dass das eine Verteilungsfunktion ist. Die punktweise Konvergenz an jedem (Stetigkeits-)Punkt gibt die Konvergenz in Verteilung.

Aufgabe K.4

Seien X, Y unabhängige, zu Parametern $(1-p)$ bzw. $(1-q)$ geometrisch verteilte Zufallsvariablen, also

$$P(X=n) = (1-p)p^n \quad \text{und} \quad P(Y=n) = (1-q)q^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Berechnen Sie $\mathbb{E}[X \mid X+Y]$.

Lösungsskizze. Nehme zuerst an, dass $p = q$. Nach Aufgabe Z12.2(b) ist in diesem Fall $\mathbb{E}[X \mid X+Y] = \frac{1}{2}(X+Y)$. Wir können also von $p \neq q$ ausgehen. Da wir es mit diskreten Zufallsariablen zu tun haben, gilt

$$\mathbb{E}[X \mid X+Y] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}[X \mid X+Y=n]\cdot \mathbb{1}_{\{X+Y=n\}}$$

Nun ist

$$P(X = k \mid X + Y = n) = \frac{P(X = k, Y = n - k)}{P(X + Y = n)} = \frac{p^k q^{n-k}}{\sum_{j=0}^n p^j q^{n-j}}$$
$$= (1 - p/q) \cdot \frac{(p/q)^k}{1 - (p/q)^{n+1}}$$

und folglich

$$\mathbb{E}[X \mid X + Y] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{\{X+Y=n\}} \cdot \frac{1 - p/q}{1 - (p/q)^{n+1}} \cdot \sum_{k=0}^n k(p/q)^k = \dots .$$

Aufgabe K.5

Es sei $0 < p < 1$ und $p \neq \frac{1}{2}$. Sei weiterhin $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die asymmetrische zufällige Irrfahrt, also $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig identisch verteilt mit

$$P(X_1 = 1) = p, \qquad P(X_1 = -1) = 1 - p.$$

Setze weiterhin $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

(a) Finden Sie $c \neq 1$, sodass $M_n = c^{S_n}$ ein Martingal ist.
(b) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < 0 < b$ und $T = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \in \{a, b\}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[T] < \infty$.
(c) Berechnen Sie $P(S_T = a)$.

Lösungsskizze.

(a) Setze $c = \frac{1-p}{p}$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Zu zeigen ist lediglich die Martingalseigenschaft. Es ist

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[c^{S_n} c^{X_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n] = M_n \cdot \mathbb{E}[c^{X_{n+1}}] = M_n(pc + (1 - p)c^{-1}) = M_n.$$

(b) Definiere für $k \in \mathbb{N}_0$ das Ereignis

$$A_k := \{X_{(a+b)k+1} = \dots = X_{(a+b)(k+1)} = 1\}.$$

In Worten ist A_k das Ereignis, dass die Schritte $(a + b)k + 1$ bis $(a + b)(k + 1)$ allesamt in positive Richtung ausfallen. Man überzeugt sich leicht, dass das Eintreten von A_k impliziert, dass $T \leq (a + b)(k + 1)$: In der Tat gilt unter A_k entweder $S_{(a+b)k} \leq a$ oder aber $S_{(a+b)(k+1)} \geq b$. Doch damit gilt $T \leq (a + b)Z$, wobei Z – die Wartezeit bis zum Eintreten eines der Ereignisse A_k – geometrisch zum Parameter p^{a+b} verteilt und ist und insbesondere endliche Erwartung ($\mathbb{E}[Z] = p^{-a-b}$) hat.

(c) Wir definieren $\tilde{M}_n := M_{n\wedge T}$ und sehen, dass $(\tilde{M}_n)$ ein beschränktes Martingal ist. Aus (b) folgt zudem sofort, dass T f.s. endlich ist. Mit Satz 9.10 (Optional Stopping) und $\alpha = P(S_T = a)$ folgt also

$$1 = \mathbb{E}[\tilde{M}_0] = \mathbb{E}[\tilde{M}_T] = \mathbb{E}[c^{S_T}] = \alpha c^a + (1 - \alpha)c^b$$

und damit

$$P(S_T = a) = \frac{1 - c^b}{c^a - c^b}.$$