Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 13: Lösungen

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z13.1

Es seien $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, quadratintegrierbare Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $M_n := (\sum_{k=1}^n Z_k)^2 - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k^2]$, $n \geq 1$, und zeigen Sie, dass $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal ist.

Lösung.

- M_n ist offenbar $\mathcal{F}_n$-messbar für $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$.
- Weiterhin ist
$$\mathbb{E}[|M_n|] \leq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n Z_k\right)^2\right] + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k^2] < \infty,$$
denn endliche Summen quadratintegrierbarer Zufallsvariablen sind wiederum quadratintegrierbar ($\mathcal{L}^2$ ist ein Vektorraum).
- Für die Martingaleigenschaft sei $n \in \mathbb{N}$ und $S_n := \sum_{k=1}^n Z_k$. Wir können
$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} Z_k\right)^2 = Z_{n+1}^2 + S_n^2 + 2S_n Z_{n+1}$$
schreiben. Nach Definition ist Z_{n+1} unabhängig von $\mathcal{F}_n$. Da $\mathbb{E}[Z_{n+1}] = 0$ liefert dies in der bedingten Erwartung
$$\mathbb{E}[(S_n + Z_{n+1})^2|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Z_{n+1}^2] + S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}[Z_{n+1}] = \mathbb{E}[Z_{n+1}^2] + S_n^2.$$
Die übrigen Terme in der Definition von M_{n+1} sind Konstanten, werden von der bedingten Erwartung also nicht weiter beeinträchtigt. Insgesamt ergibt sich
$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(S_n + Z_{n+1})^2|\mathcal{F}_n] - \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}[Z_k^2] = S_n^2 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[Z_k^2] = M_n.$$

Aufgabe Z13.2

Sei $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptiert an eine Filtration und $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$. Zeigen Sie, dass M genau dann ein Martingal ist, falls für alle f.s. beschränkten Stoppzeiten τ gilt: $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$.

Lösung

„⇒“ Es sei M ein Martingal und τ eine Stoppzeit, sodass ein $c \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\tau \le c$ f.s. Die Anwendung des Stoppsatzes mit $\sigma \equiv 0 \le \tau$ liefert

$$\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_\tau|\mathcal{F}_0]] = \mathbb{E}[M_\tau].$$

„⇐“ Es sei nun M ein adaptierter integrierbarer Prozess, sodass für alle f.s. beschränkten Stoppzeiten τ gilt: $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$. Wir müssen nur noch die Martingaleigenschaft nachweisen. Sei hierzu $n \in \mathbb{N}_0$. Zu zeigen ist, dass für alle $A \in \mathcal{F}_n$ gilt:

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \cdot \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[M_n \cdot \mathbb{1}_A].$$

Betrachte die Abbildung $\tau = n \cdot \mathbb{1}_A + (n+1) \cdot \mathbb{1}_{A^c}$. Es gilt

$$\{\tau \le m\} = \begin{cases} \emptyset, \text{ falls } m < n, \\ A, \text{ falls } m = n, \\ \Omega, \text{ falls } m > n \end{cases} \in \mathcal{F}_m.$$

Dies zeigt, dass τ eine Stoppzeit ist. Zudem gilt $\tau \le n+1$ f.s. Dies impliziert nach Voraussetzung

$$\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_n \cdot \mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[M_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{A^c}] = \mathbb{E}[M_n \cdot \mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[M_{n+1}] - \mathbb{E}[M_{n+1} \cdot \mathbb{1}_A]. \quad (*)$$

Nun ist aber auch $\omega \mapsto n+1$ eine f.s. beschränkte (deterministische) Stoppzeit, d.h. $\mathbb{E}[M_{n+1}] = \mathbb{E}[M_0]$. Dies zeigt zusammen mit $(*)$, dass $\mathbb{E}[M_{n+1} \cdot \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[M_n \cdot \mathbb{1}_A]$. Da $A \in \mathcal{F}_n$ beliebig war, muss $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$ f.s. gelten.

Aufgabe Z13.3

Zeigen Sie: Für ein Martingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und eine fast sicher endliche Stoppzeit τ gilt

$$\mathbb{E}[|X_\tau|] \le \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|].$$

Lösung. Für $\mathcal{F}_k := \sigma(X_0, \dots, X_k)$ ist nach Definition $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$. Also gilt für $n \ge k$, dass

$$\mathbb{E}[|X_\tau| \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=k\}}] = \mathbb{E}[|X_k| \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=k\}}] \le \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[|X_n| \mid \mathcal{F}_k] \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=k\}}\Big] = \mathbb{E}[|X_n| \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=k\}}],$$

wobei in der Abschätzung die Tatsache, dass $(|X_n|)_n$ ein Submartingal ist (Lemma 9.6), benutzt wurde und in der letzten Identität die Definition bedingter Erwartung. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_\tau| \cdot \mathbb{1}_{\{\tau\le n\}}] &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_\tau| \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=k\}}] \le \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_n| \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=k\}}] \\ &= \mathbb{E}[|X_n| \cdot \mathbb{1}_{\{\tau\le n\}}] \le \mathbb{E}[|X_n|].\end{aligned}$$

Nehmen wir nun auf beiden Seiten $n \to \infty$, so folgt das Resultat mit monotoner Konvergenz.

Aufgabe Z13.4

Ziel dieser Aufgabe ist es, exponentielle Schranken für die Abweichungswahrscheinlichkeiten eines zentrierten Martingals vom Wert 0 herzuleiten. Sei hierzu $(M_n)_{n\ge0}$ bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$ ein Martingal mit $M_0 = 0$. Für eine Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ gelte $|M_n - M_{n-1}| \le c_n$ f.s. für alle $n \in \mathbb{N}$.

1. Nutzen Sie die Konvexität der Exponentialfunktion, um für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die Abschätzung $\mathbb{E}[e^{\lambda(M_n - M_{n-1})}|\mathcal{F}_{n-1}] \leq \cosh(\lambda c_n)$ zu zeigen.

2. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung $\cosh(x) \leq e^{x^2/2}$.

3. Zeigen Sie mit (a) und (b) für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[e^{\lambda M_n}] \leq \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2\right).$$

4. Man zeige schließlich die *Azuma-Ungleichung*

$$P(|M_n| \geq a) \leq 2\exp\left(-\frac{a^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right), \quad a \geq 0.$$

   (*Hinweis:* Exponentielle Markov-Ungleichung.)

Lösung

1. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Da $-c_n \leq M_n - M_{n-1} \leq c_n$ nach Voraussetzung, finden wir eine Darstellung von $M_n - M_{n-1}$ als zufällige Konvexkombination von c_n und $-c_n$. Genauer ist

$$M_n - M_{n-1} = \underbrace{\frac{c_n + M_n - M_{n-1}}{2c_n}}_{\in[0,1]} \cdot c_n + \underbrace{\left(1 - \frac{c_n + M_n - M_{n-1}}{2c_n}\right)}_{=(c_n - M_n + M_{n-1})/2c_n}(-c_n).$$

   Wir können also unter der Abkürzung $Y := M_n - M_{n-1}$

$$e^{\lambda Y} = \exp\left(\frac{c_n + Y}{2c_n}\lambda c_n + \frac{c_n - Y}{2c_n}(-\lambda c_n)\right) \leq \frac{c_n + Y}{2c_n}e^{\lambda c_n} + \frac{c_n - Y}{2c_n}e^{-\lambda c_n}$$

   abschätzen, wobei wir in der Ungleichung die Konvexität der Exponentialfunktion verwenden. Aus der Monotonie der bedingten Erwartung folgt

$$\mathbb{E}[e^{\lambda(M_n - M_{n-1})}|\mathcal{F}_{n-1}] \leq \underbrace{\frac{1}{2}e^{\lambda c_n} + \frac{1}{2}e^{-\lambda c_n}}_{=\cosh(\lambda c_n)} + \frac{e^{\lambda c_n} - e^{-\lambda c_n}}{2c_n}\underbrace{\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_{n-1}]}_{=0} = \cosh(\lambda c_n).$$

2. Verwendet man die Reihendarstellung der Exponentialfunktion, so ergibt sich $\cosh(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!}$. Andererseits ist

$$e^{x^2/2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{2^i i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{2i \cdot (2i-2) \cdots 2} \geq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} = \cosh(x).$$

3. Der Beweis wird per Induktion über n geführt.
   <u>$n = 1$:</u> Wende (a) an, um die Abschätzung $\mathbb{E}[e^{\lambda M_1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{\lambda(M_1 - M_0)}|\mathcal{F}_0]] \leq \cosh(\lambda c_1)$ zu finden. Nach (b) ist $\cosh(\lambda c_1) \leq \exp(\frac{1}{2}\lambda^2 c_1^2)$.
   <u>$n \to n+1$:</u> Nach (a) und der Induktionshypothese ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{\lambda M_{n+1}}] &= \mathbb{E}[e^{\lambda M_n}\mathbb{E}[e^{\lambda(M_{n+1} - M_n)}|\mathcal{F}_n]] \leq \cosh(\lambda c_{n+1})\mathbb{E}[e^{\lambda M_n}] \\ &\leq \cosh(\lambda c_{n+1}) \cdot \exp\left(\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2/2\right) \overset{\text{(b)}}{\leq} \exp\left(\lambda^2 \sum_{k=1}^{n+1} c_k^2/2\right).\end{aligned}$$

4. O.B.d.A. sei $a > 0$. Wir wenden die exponentielle Markov-Ungleichung:

$$P(M_n \geq a) \leq \mathbb{E}[e^{\lambda M_n}]e^{-\lambda a} \leq \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{k=1}^n c_k^2 - \lambda a\right) =: \exp(f(\lambda)).$$

Es ist

$$f'(\lambda) = \lambda \sum_{k=1}^n c_k^2 - a \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{a}{\sum_{k=1}^n c_k^2} =: \lambda^*.$$

Andererseits ist die zweite Ableitung $f''(\lambda) = \sum_{k=1}^n c_k^2 > 0$, d.h. $f(\lambda^*) = \min_{\lambda \geq 0} f(\lambda)$. Setze nun die Wahl von λ^* in die obige Abschätzung ein und erhalte

$$P(M_n \geq a) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2\sum_{k=1}^n c_k^2}\right).$$

Wende nun die soeben erhaltene Schranke auf das Martingal $-M$ an, um

$$P(M_n \leq -a) = P(-M_n \geq a) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2\sum_{k=1}^n c_k^2}\right).$$

Ergo ist

$$P(|M_n| \geq a) \leq P(M_n \geq a) + P(M_n \leq -a) \leq 2\exp\left(-\frac{a^2}{2\sum_{k=1}^n c_k^2}\right).$$

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü13.5

Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Submartingale bezüglich einer gemeinsamen Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Zeigen Sie, dass auch $(X_n \vee Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Submartingal ist. (*Erinnerung:* $X \vee Y := \max\{X, Y\}$.)

Lösung.

- Da $\{X_n \vee Y_n \leq a\} = \{X_n \leq a\} \cap \{Y_n \leq a\} \in \mathcal{F}_n$, ist die Adaptiertheit des Prozesses klar.
- Integrierbarkeit folgt für alle $n \geq 0$ aus der Beobachtung $|X_n \vee Y_n| \leq |X_n| + |Y_n|$ – die rechte Seite dieser Ungleichung ist integrierbar.
- Es bleibt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\mathbb{E}[X_n \vee Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] \geq X_{n-1} \vee Y_{n-1}$ zu zeigen. Dazu bemerken wir zunächst, dass aus der Submartingaleigenschaft

$$\mathbb{E}[X_n \vee Y_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \geq \mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \geq 0 \text{ f.s.}$$

folgt, und analog $\mathbb{E}[X_n \vee Y_n - Y_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \geq 0$ f.s. Definiere das Ereignis $A := \{X_{n-1} \geq Y_{n-1}\}$, welches wegen der Adaptiertheit der Prozesse in $\mathcal{F}_{n-1}$ liegt. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_n \vee Y_n - X_{n-1} \vee Y_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{E}[X_n \vee Y_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &\quad + \mathbb{1}_{A^c} \cdot \mathbb{E}[X_n \vee Y_n - Y_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &\geq 0 \text{ f.s.}\end{aligned}$$

Dies ist eine äquivalente Umformulierung der gewünschten Ungleichung.

Aufgabe Ü13.6

Sei M ein Submartingal, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $k \geq n$ mit $\mathbb{E}[M_k] \leq \mathbb{E}[M_1]$ existiere. Zeigen Sie, dass M ein Martingal ist.

Lösung. Es ist nur die Martingaleigenschaft nachzuweisen. Wir zeigen zunächst, dass die Folge der Momente $(\mathbb{E}[M_n])_n$ eine konstante Folge ist. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und wähle $k \geq n$ mit $\mathbb{E}[M_k] \leq \mathbb{E}[M_0]$. Iterierte Anwendung der Submartingaleigenschaft und der Turmeigenschaft der bedingten Erwartung liefern

$$\mathbb{E}[M_k|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_k|\mathcal{F}_{k-1}] \mid \mathcal{F}_n] \geq \mathbb{E}[M_{k-1}|\mathcal{F}_n] \geq \ldots \geq M_n.$$

(Für den Fall $n = k$ gilt obige Zeile offensichtlicherweise.) Da zudem $M_0 \leq \mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_0]$ gilt, erhalten wir durch die Anwendung der unbedingten Erwartung in all diesen Ungleichungen $\mathbb{E}[M_0] \leq \mathbb{E}[M_n] \leq \mathbb{E}[M_k] \leq \mathbb{E}[M_0]$. Anstelle der Ungleichungszeichen müssen folglich überall Gleichheitszeichen stehen.
Als nächstes zeigen wir, dass für alle n gilt: $P(\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] > M_{n-1}) = 0$. Hierzu kürze $A := \{\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] > M_{n-1}\} \in \mathcal{F}_{n-1}$ und nimm zum Widerspruch $P(A) > 0$ an. Da

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_n \cdot \mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] \cdot \mathbb{1}_A] > \mathbb{E}[M_{n-1} \cdot \mathbb{1}_A] \\ &\underset{\mathbb{E}[M_n]=\mathbb{E}[M_{n-1}]}{\Rightarrow} \quad \mathbb{E}[M_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{A^c}] < \mathbb{E}[M_n \cdot \mathbb{1}_{A^c}].\end{aligned}$$

Andererseits gilt jedoch auf A^c wegen der Submartingaleigenschaft f.s. $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$ und deshalb $\mathbb{E}[M_n; A^c] = \mathbb{E}[M_{n-1}; A^c]$, was den gesuchten Widerspruch liefert.

Aufgabe Ü13.7

Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die einfache symmetrische Irrfahrt (also $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ mit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ unabhängig identisch verteilt und $P(X_k = \pm 1) = \frac{1}{2}$). Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und definiere $T := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \in \{-a, b\}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[T] < \infty$.

Lösung. Definiere für $k \in \mathbb{N}_0$ das Ereignis

$$A_k := \{X_{(a+b)k+1} = \ldots = X_{(a+b)(k+1)} = 1\}.$$

In Worten ist A_k das Ereignis, dass die Schritte $(a+b)k+1$ bis $(a+b)(k+1)$ allesamt in positive Richtung ausfallen. Man überzeugt sich leicht, dass das Eintreten von A_k impliziert, dass $T \leq (a+b)(k+1)$: In der Tat gilt unter A_k entweder $S_{(a+b)k} \leq a$ oder aber $S_{(a+b)(k+1)} \geq b$. Doch damit gilt $T \leq (a+b)Z$, wobei Z – die Wartezeit bis zum Eintreten eines der Ereignisse A_k – geometrisch zum Parameter $2^{-(a+b)}$ verteilt und ist und insbesondere endliche Erwartung ($\mathbb{E}[Z] = 2^{a+b}$) hat.

Aufgabe Ü13.8

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_n)$ und T_1, T_2 Stoppzeiten mit $P(T_1 \leq T_2 \leq K) = 1$ für eine Konstante K. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}[X_{T_1}] \leq \mathbb{E}[X_{T_2}].$$

Lösung. Mit der Definition $H_n := \mathbb{1}_{\{T_1<n\leq T_2\}} = \mathbb{1}_{\{T_1\leq n-1\}}\mathbb{1}_{\{T_2\leq n-1\}^c}$ erhalten wir, dass H_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist. Setzen wir weiterhin

$$Y_n := (H\cdot X)_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{T_1<n\leq T_2\}}(X_i - X_{i-1}) = X_{T_2\wedge n} - X_{T_1\wedge n},$$

so ist (Y_n) nach Satz 9.7 ein Submartingal. Doch damit gilt

$$\mathbb{E}[X_{T_2}] - \mathbb{E}[X_{T_1}] = \mathbb{E}[Y_K] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_K \mid \mathcal{F}_0]] \geq \mathbb{E}[Y_0] = \mathbb{E}[X_0 - X_0] = 0,$$

was zu zeigen war.

Aufgabe Ü13.9

(a) Es sei $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ eine Stoppzeit. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $\{\tau > n\} \in \mathcal{F}_n$. Diese Messbarkeit bedeutet, dass wir zu jedem Zeitpunkt entscheiden können, ob das Stoppen bislang ausgeblieben ist.

(b) Es sei $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0\cup\{+\infty\}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass τ genau dann eine Stoppzeit bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ist, wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$.

(c) Es seien σ und τ Stoppzeiten bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Zeigen Sie, dass dann auch (i) $\sigma \wedge \tau$, (ii) $\sigma \vee \tau$, (iii) $\sigma + \tau$ Stoppzeiten sind.

Lösung.

(a) $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle n nach Definition einer Stoppzeit. Dies zeigt, dass $\{\tau > n\} = \{\tau \leq n\}^c \in \mathcal{F}_n$ gelten muss.

(b) Zunächst sei τ eine Stoppzeit, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Im Falle $n = 0$ ist $\{\tau \leq 0\} = \{\tau = 0\}$. Im Falle $n \geq 1$ ist wegen (a)

$$\{\tau = n\} = \underbrace{\{\tau \leq n\}}_{\in\mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{\tau > n-1\}}_{\in\mathcal{F}_{n-1}\subseteq\mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n.$$

Es sei nun $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle n. Es gilt:

$$\{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{\{\tau = k\}}_{\in\mathcal{F}_k\subseteq\mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n.$$

(c)
- $\{\sigma \wedge \tau \leq n\} = \{\sigma \leq n\} \cup \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, da σ und τ Stoppzeiten sind.
- $\{\sigma \vee \tau \leq n\} = \{\sigma \leq n\} \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.
- $\{\sigma + \tau = n\} = \bigcup_{k=0}^{n}\{\sigma = k\} \cap \{\tau = n-k\} \in \mathcal{F}_n$.