Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 13

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z13.1

Seien $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, quadratintegrierbare Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und sei $M_n := (\sum_{k=1}^n Z_k)^2 - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k^2]$, $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal ist.

Aufgabe Z13.2

Sei $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptiert an eine Filtration und $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass M genau dann ein Martingal ist, falls für alle f.s. beschränkten Stoppzeiten τ gilt: $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$.

Aufgabe Z13.3

Zeigen Sie: Für ein Martingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und eine fast sicher endliche Stoppzeit τ gilt

$$\mathbb{E}[|X_\tau|] \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|].$$

Aufgabe Z13.4

Ziel dieser Aufgabe ist es, exponentielle Schranken für die Abweichungswahrscheinlichkeiten eines zentrierten Martingals vom Wert 0 herzuleiten. Sei hierzu $(M_n)_{n\geq 0}$ bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal mit $M_0 = 0$. Für eine Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ gelte $|M_n - M_{n-1}| \leq c_n$ f.s. für alle $n \in \mathbb{N}$.

1. Nutzen Sie die Konvexität der Exponentialfunktion, um für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die Abschätzung $\mathbb{E}[e^{\lambda(M_n - M_{n-1})}|\mathcal{F}_{n-1}] \leq \cosh(\lambda c_n)$ zu zeigen.

2. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung $\cosh(x) \leq e^{x^2/2}$.

3. Zeigen Sie mit (a) und (b) für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[e^{\lambda M_n}] \leq \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{k=1}^n c_k^2\right).$$

4. Man zeige schließlich die *Azuma-Ungleichung*

$$P(|M_n| \geq a) \leq 2\exp\left(-\frac{a^2}{2\sum_{k=1}^n c_k^2}\right), \quad a \geq 0.$$

(*Hinweis:* Exponentielle Markov-Ungleichung.)

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü13.5

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Submartingale bezüglich einer gemeinsamen Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Zeigen Sie, dass auch $(X_n \vee Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Submartingal ist. (*Erinnerung:* $X \vee Y := \max\{X, Y\}$.)

Aufgabe Ü13.6

Sei $M = (M)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $k \geq n$ mit $\mathbb{E}[M_k] \leq \mathbb{E}[M_0]$ existiere. Zeigen Sie, dass M ein Martingal ist.

Aufgabe Ü13.7

Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die einfache symmetrische Irrfahrt (also $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ mit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ unabhängig identisch verteilt und $P(X_k = \pm 1) = 1/2$). Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und definiere $T := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \in \{-a, b\}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[T] < \infty$.

Aufgabe Ü13.8

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_n)$ und T_1, T_2 Stoppzeiten mit $P(T_1 \leq T_2 \leq K) = 1$ für eine Konstante K. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}[X_{T_1}] \leq \mathbb{E}[X_{T_2}].$$

Aufgabe Ü13.9

(a) Es sei $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ eine Stoppzeit. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $\{\tau > n\} \in \mathcal{F}_n$. Diese Messbarkeit bedeutet, dass wir zu jedem Zeitpunkt entscheiden können, ob das Stoppen bislang ausgeblieben ist.

(b) Es sei $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass τ genau dann eine Stoppzeit bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ist, wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$.

(c) Es seien σ und τ Stoppzeiten bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Zeigen Sie, dass dann auch (i) $\sigma \wedge \tau$, (ii) $\sigma \vee \tau$, (iii) $\sigma + \tau$ Stoppzeiten sind.