Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 12: Lösungen

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Im Folgenden verwenden wir die Notation $\mathbb{E}[X; A] := \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A]$, wobei $X \in L^1$, $A \in \mathcal{A}$.

Aufgabe Z12.1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien X, Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f(x, y)$. Ferner gelte $\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\,\mathrm{d}x > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Definiere

$$\mu(y, A) := \frac{\int_A f(x, y)\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\,\mathrm{d}x}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass $\mu(Y(\omega), A)$ eine reguläre Version der Verteilung von X gegeben $\sigma(Y)$ ist.

Lösung. Wir zeigen zuerst folgendes

Lemma 1. *Es seien X, Y mit gemeinsamer Dichte $f(x, y)$ gegeben und g so, dass $\mathbb{E}[|g(X)|] < \infty$. Dann ist $\mathbb{E}[g(X) \mid Y] = h(Y)$ mit*

$$\left(\int f(x, y)\,\mathrm{d}x\right) h(y) = \int g(x) f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Da $h(Y) \in \sigma(Y)$, ist (1) erfüllt. Um Punkt (2) zu überprüfen, sei $A \in \sigma(Y)$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ von der Form, dass $A = \{\omega : Y(\omega) \in B\} = \{Y \in B\}$. Zudem ist $P_Y(\,\mathrm{d}y) = \int f(x,\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$ und damit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(Y) \cdot \mathbb{1}_A] &= \int h(Y) \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}P = \int_B h(y) \int f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_B \int g(x) f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \mathbb{E}[g(X) \cdot \mathbb{1}_B(Y)] = \mathbb{E}[g(X) \cdot \mathbb{1}_A].\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Man sieht, dass die Restriktion $\int f(x, y)\,\mathrm{d}x > 0$ in Lemma 1 nicht notwendig ist: h kann für alle y mit $\int f(x, y)\,\mathrm{d}x = 0$ als Null definiert werden. Analog könnte damit auch die gesamte Aufgabe allgemeiner gestellt werden.

Um die Aufgabe zu beweisen, müssen wir zwei Dinge zeigen. Punkt (b) erhalten wir direkt mit Lemma 1 und $g = \mathbb{1}_A$. Für Punkt (a) vermerken wir, dass $A \mapsto \mu(y, A)$ mit dem Satz der dominierten Konvergenz ein W-Maß ist.

Aufgabe Z12.2

(a) Seien A und B unabhängige, zu Parametern α und β Poisson-verteilte Zufallsvariablen. Berechnen Sie $\mathbb{E}[A \mid A+B]$.

(b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. und integrierbar. Weiterhin sei $S_n = \sum_{i=1}^n S_i$. Zeigen Sie für alle $1 \leq i \leq n$, dass

$$\mathbb{E}[X_i \mid S_n] = \tfrac{1}{n} S_n \quad P\text{-f.s.}$$

Lösung

(a) Betrachte die Partition $\Omega := \dot{\bigcup}_{k \geq 0} \{A+B=k\}$. Klarerweise ist

$$\sigma(A+B) = \sigma(\{A+b=k\} \mid k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Wir können also die Formel aus der Vorlesung für Erwartungen bedingt auf disjunkt und abzählbar erzeugte σ-Algebren verwenden:

$$\mathbb{E}[A \mid A+B] = \sum_{k \geq 0} \frac{\mathbb{E}[A; A+B=k]}{P(A+B=k)} \cdot \mathbb{1}_{\{A+B=k\}} = \sum_{k \geq 1} \frac{\mathbb{E}[A; A+B=k]}{P(A+B=k)} \cdot \mathbb{1}_{\{A+B=k\}}.$$

Es gilt

- $P(A+B=k) = \sum_{n=0}^k \frac{e^{-\alpha}\alpha^n}{n!} \frac{e^{-\beta}\beta^{k-n}}{(k-n)!} = \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{k!}(\alpha+\beta)^k$.
- $\mathbb{E}[A; A+B=k] = \sum_{n=1}^k \frac{e^{-\alpha}\alpha^n}{(n-1)!} \frac{e^{-\beta}\beta^{k-n}}{(k-n)!} = \frac{\alpha e^{-(\alpha+\beta)}}{(k-1)!}(\alpha+\beta)^{k-1}$.

Dies impliziert

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[A \mid A+B] &= \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha e^{-(\alpha+\beta)}}{(k-1)!}(\alpha+\beta)^{k-1} \cdot \frac{k!}{e^{-(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta)^k} \cdot \mathbb{1}\{A+B=k\} \\
&= \sum_{k \geq 1} \frac{k\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \mathbb{1}\{A+B=k\} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(A+B).
\end{aligned}$$

(b) Es sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $A := \{S_n \in B\} \in \sigma(S_n)$. Aus Gründen der identischen Verteilungsannahme und Symmetriegründen ist für $i \in \{1, ..., n\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_i; A] &= \int_{\{x_1+...+x_n \in B\}} x_i P_{(X_1,...,X_n)}(\,\mathrm{d}x_1, ..., \,\mathrm{d}x_n) \\
&= \int_{\{x_1+...+x_n \in B\}} x_i P_{X_1}(\,\mathrm{d}x_1)...P_{X_1}(\,\mathrm{d}x_n) \\
&= \int_{\{x_1+...+x_n \in B\}} x_1 P_{X_1}(\,\mathrm{d}x_1)...P_{X_1}(\,\mathrm{d}x_n) = \mathbb{E}[X_1; A].
\end{aligned}$$

Wegen der Linearität der bedingten Erwartung ist dann P-f.s.

$$S_n = \mathbb{E}[S_n|S_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i|S_n] = n\mathbb{E}[X_1|S_n].$$

Dies zeigt für alle $i = 1, ..., n$

$$\mathbb{E}[X_i|S_n] = \mathbb{E}[X_1|S_n] = \frac{1}{n} S_n.$$

Aufgabe Z12.3

Finden Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, eine Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}^1(P)$ sowie Teil-σ-Algebren $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$, sodass weder $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ noch $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ und

$$P\Big(\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \mid \mathcal{H}] \neq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] \mid \mathcal{G}]\Big) > 0.$$

(*Hinweis*: Betrachten Sie für die Wahl von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ σ-Algebren der Form $\sigma(A)$, wobei A ein Ereignis in $\mathcal{A}$ sei.)

Lösung. Für einen allgemeinen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ betrachte Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ mit der Eigenschaft $0 < P(A), P(B) < 1$. Setze $\mathcal{G} := \sigma(A) = \sigma(A, A^c) = \{A, A^c, \Omega, \emptyset\}$ sowie $\mathcal{H} = \sigma(B)$. Wir berechnen zunächst für eine integrierbare Zufallsvariable X die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ nach der Partitionsformel.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] &= \frac{\mathbb{E}[X;A]}{P(A)} \cdot \mathbb{1}_A + \frac{\mathbb{E}[X;A^c]}{P(A^c)} \cdot \mathbb{1}_{A^c} = \frac{\mathbb{E}[X;A]}{P(A)} \cdot \mathbb{1}_A + \frac{\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X;A]}{1-P(A)}(1 - \mathbb{1}_A) \\ &= \frac{\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X;A]}{1-P(A)} + \left(\frac{\mathbb{E}[X;A]}{P(A)} - \frac{\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X;A]}{1-P(A)}\right) \cdot \mathbb{1}_A. \qquad (*)\end{aligned}$$

Mit der Linearität der bedingten Erwartung impliziert dies, dass

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \frac{\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X;A]}{1-P(A)} + \left(\frac{\mathbb{E}[X;A]}{P(A)} - \frac{\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X;A]}{1-P(A)}\right) \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{H}],$$

Wende $(*)$ an, wobei die Ersetzungen $X \to \mathbb{1}_A$ und $A \to B$ vorgenommen werden sollten. Wir erhalten

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{H}] = \frac{P(A) - P(A\cap B)}{1-P(B)} + \left(\frac{P(A\cap B)}{P(B)} - \frac{P(A) - P(A\cap B)}{1-P(B)}\right) \cdot \mathbb{1}_B.$$

Einsetzen in die obige Gleichung liefert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = &\frac{\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X;A]}{1-P(A)} + \frac{\mathbb{E}[X;A](P(A) - P(A\cap B))}{P(A)(1-P(B))} \\ &- \frac{(\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X;A])(P(A) - P(A\cap B))}{(1-P(A))(1-P(B))} \\ &+ \left(\frac{P(A\cap B)}{P(B)} - \frac{P(A) - P(A\cap B)}{1-P(B)}\right)\left(\frac{\mathbb{E}[X;A]}{P(A)} - \frac{\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X;A]}{1-P(A)}\right) \cdot \mathbb{1}_B.\end{aligned}$$

Vertauschen der Rollen von A und B liefert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] = &\frac{\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X;B]}{1-P(B)} + \frac{\mathbb{E}[X;B](P(B) - P(A\cap B))}{P(B)(1-P(A))} \\ &- \frac{(\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X;B])(P(B) - P(A\cap B))}{(1-P(B))(1-P(A))} \\ &+ \left(\frac{P(A\cap B)}{P(A)} - \frac{P(B) - P(A\cap B)}{1-P(A)}\right)\left(\frac{\mathbb{E}[X;B]}{P(B)} - \frac{\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X;B]}{1-P(B)}\right) \cdot \mathbb{1}_A.\end{aligned}$$

Wähle nun den schlichten Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$, $P = \lambda|_{[0,1]}$ sowie die Zufallsvariable $X(\omega) = 2\omega$ und die Ereignisse $A = [0, \frac{1}{3}]$ und $B = [0, \frac{2}{3}]$. Wir verwenden nun die oben hergeleiteten P-f.s. gültigen Identitäten, um herauszufinden, dass für P-f.a. $\omega \in (\frac{2}{3}, 1]$ gilt $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}](\omega) = \frac{4}{3}$, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}](\omega) = \frac{7}{6}$, ergo $P(\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] \neq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}]) \geq \frac{1}{3}$.

Aufgabe Z12.4

Seien X und Y unabhängig und auf $[0, a]$ mit $a > 0$ gleichverteilt. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von $X \vee Y := \max\{X, Y\}$ und $X \wedge Y := \min\{X, Y\}$ und berechnen Sie daraus $\mathbb{E}[X \mid X \vee Y]$.

Lösung 1. Wir suchen zunächst nach einer Intuition dafür, was das Ergebnis sein sollte. Informal gilt mit $V := X \vee Y$, dass

$$\mathbb{E}[X \mid V] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{\{X=V\}} \mid V] + \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{\{X \neq V\}} \mid V] = \tfrac{1}{2}\mathbb{E}[V|V] + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}[\mathcal{U}_{[0,V)}] = \tfrac{3}{4}V,$$

Da für $X \neq V$ folgt, dass X uniform in $[0, V)$ verteilt ist. Wir beweisen nun rigoros, dass $\mathbb{E}[X \mid X \vee Y] = \frac{3}{4}(X \vee Y)$. Die Messbarkeit ist klar. Beobachte weiterhin, dass für $0 \leq t \leq a$

$$\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{\{V \leq t\}}] = \int P(X \cdot \mathbb{1}_{\{V \leq t\}} > x)\,\mathrm{d}x = \int P(X > x, V \leq t)\,\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{(t-x)t}{a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{t^3}{a^2}$$

und

$$\gamma\mathbb{E}[V \cdot \mathbb{1}_{\{V \leq t\}}] = \gamma \int P(x < V \leq t)\,\mathrm{d}x = \gamma \int_0^t \frac{t^2 - x^2}{a^2}\,\mathrm{d}x = \gamma\frac{2t^3}{3a^2}.$$

Die beiden Werte stimmen also für $\gamma = \frac{3}{4}$ überein. Nun sind jedoch $\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A]$ und $\frac{3}{4}\mathbb{E}[V \cdot \mathbb{1}_A]$ Maße (die σ-Additivität folgt mit dominierter Konvergenz), die auf dem $\cap$-stabilen Erzeuger $\{M \leq t : 0 \leq t \leq a\}$ übereinstimmen, also $\frac{3}{4}V = \mathbb{E}[X \mid V]$.

Lösung 2. Zunächst berechnen wir die gemeinsame Verteilung der beiden Zufallsvariablen $U := X \wedge Y$ und $V := X \vee Y$. Seien $0 \leq x < y \leq a$. Wir berechnen

$$P(U \leq x, V \leq y) = P(X \leq x, Y \leq x) + 2P(X \leq x, x < Y \leq y) = \frac{x^2 + 2x(y-x)}{a^2}. \qquad (*)$$

Zweimaliges partielles Ableiten liefert einen Kandidaten für die Lebesguedichte der gemeinsamen Verteilung, nämlich $f(u, v) = \frac{2}{a^2} \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq u < v \leq a\}}$. Dies überprüfen wir: seien x, y wie oben.

$$\int_0^x \int_0^y f(u, v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_0^x \frac{2}{a^2}(y - u)\,\mathrm{d}u = \frac{2yx}{a^2} - \frac{x^2}{a^2},$$

was mit $(*)$ übereinstimmt.

Nun bemerken wir, dass wegen der identischen Verteilungsannahme für alle $A \in \sigma(X \vee Y)$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|X \vee Y] \cdot \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A] = \int_\Omega X \cdot \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}P = \int_\Omega Y \cdot \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}P = \mathbb{E}[Y \cdot \mathbb{1}_A]$$

gilt. Dies bedeutet, dass $\mathbb{E}[X|X \vee Y] = \mathbb{E}[Y|X \vee Y]$ P-f.s. gilt. Weiterhin impliziert diese Beobachtung

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|X \vee Y] &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}[X|X \vee Y] + \mathbb{E}[X|X \vee Y]) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}[X + Y|X \vee Y] \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}[X \vee Y + X \wedge Y|X \vee Y] = \frac{1}{2}X \vee Y + \frac{1}{2}\mathbb{E}[X \wedge Y|X \vee Y].\end{aligned}$$

Mit Lemma 1 ergibt sich

$$\mathbb{E}[U \mid V] = \frac{\int u f(u, V)\,\mathrm{d}u}{\int f(u, V)\,\mathrm{d}u} = \frac{\int_0^V u\,\mathrm{d}u}{\int_0^V\,\mathrm{d}u} = \frac{\int_0^{X \vee Y} u\,\mathrm{d}u}{X \vee Y} = \frac{X \vee Y}{2}.$$

Folglich ist $\mathbb{E}[X|X \vee Y] = \frac{3}{4}(X \vee Y)$.

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü12.5

Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X \mid X^2]$ für $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ standardnormalverteilt.

Lösung. Für $X^2 = c \geq 0$ folgt $X = \pm\sqrt{c}$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit, wir raten also, dass der bedingte Erwartungswert $Y = 0$ ist.
Dies gilt es nun zu beweisen. Die $\sigma(X^2)$-Messbarkeit von 0 ist klar. Zu $A \in \sigma(X^2)$ gibt es $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{\{X^2 \in B\}}$, zu zeigen ist also $\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{\{X^2 \in B\}}] = \mathbb{E}[Y \cdot \mathbb{1}_{\{X^2 \in B\}}] = 0$. Sei f die Dichte von X. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{\{X^2 \in B\}}] &= \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{\{X^2 \in B \cap \mathbb{R}_+\}}] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{\{|X| \in \sqrt{B \cap \mathbb{R}_+}\}}] \\
&= \int X \cdot \mathbb{1}_{\{|X| \in \sqrt{B \cap \mathbb{R}_+}\}} \,\mathrm{d}P \\
&= \int x \cdot \mathbb{1}_{\{|x| \in \sqrt{B \cap \mathbb{R}_+}\}}(x) \,\mathrm{d}P_X = \int\limits_{\pm\sqrt{B \cap \mathbb{R}_+}} x f(x) \,\mathrm{d}x = 0,
\end{aligned}$$

da $xf(x)$ eine ungerade Funktion ist.

Aufgabe Ü12.6

Vervollständigen Sie den Beweis zu Satz 8.6 der Vorlesung: Zeigen Sie

(C) $\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathcal{F}] = a\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]$ für $a, b \in \mathbb{R}$,

(I) $X, Y \in L^2, Y$ $\mathcal{F}$-messbar $\Longrightarrow$ Der Ausdruck $\mathbb{E}[(X-Y)^2]$ wird minimiert von $Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$,

(J) $|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]| \leq \mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{F}]$,

(K) φ konvex $\Longrightarrow \varphi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{F}]$.

Lösung.

(C) Sei $\tilde{Z} = \mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}]$ mit $Z \in \{Y, X\}$. Da die Messbarkeit klar ist, genügt die Beobachtung, dass für $A \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(aX + bY) \cdot \mathbb{1}_A] &= a\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A] + b\mathbb{E}[Y \cdot \mathbb{1}_A] = a\mathbb{E}[\tilde{X} \cdot \mathbb{1}_A] + b\mathbb{E}[\tilde{Y} \cdot \mathbb{1}_A] \\
&= \mathbb{E}[(a\tilde{X} + b\tilde{Y}) \cdot \mathbb{1}_A].
\end{aligned}$$

(I) Sei Z beliebig in L^2 und $\mathcal{F}$-messbar. Mit Cauchy-Schwarz ist $\mathbb{E}[XZ] < \infty$ und wir können Satz 6.8(G) anwenden, um

$$\mathbb{E}[ZX \mid \mathcal{F}] = Z \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$$

zu erhalten. Nehmen wir auf beiden Seiten den Erwartungswert, so folgt mit der Turmeigenschaft, dass $\mathbb{E}[ZX] = \mathbb{E}[Z \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]]$, bzw.

$$\mathbb{E}[Z \cdot (X - \mathbb{E}[E|\mathcal{F}])] = 0$$

durch Umstellen. Für $Y \in L^2$ gilt auch für $Z = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] - Y$, dass $Z \in L^2$. Per Definition und mit obiger Beobachtung gilt dann

$$\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + Z)^2\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2\right] + \mathbb{E}\left[Z^2\right].$$

Die rechte Seite wird minimiert für $Z = 0$, also $Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$.

(J) Folgt aus (K).

(K) Definiere

$$\mathcal{L} := \{L : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid L(x) = ax + b \text{ für } a, b \in \mathbb{R}; L(x) \leq \varphi(x)\ \forall x\},$$

die Menge aller linearen Funktionen, deren Graph vollständig unter dem von φ liegt. Man überzeugt sich leicht davon, dass

$$\varphi(x) = \sup_{L \in \mathcal{L}} \{L(x)\}.$$

Für $L \in \mathcal{L}$ gilt dann

$$\mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{F}] \geq \mathbb{E}[L(X) \mid \mathcal{F}] = L(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])$$

und somit $\varphi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]) = \sup_L L(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]) \leq \sup_L \mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{F}] = \mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{F}]$.

Aufgabe Ü12.7

Sei $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X|\mathcal{F}] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2|\mathcal{F}]$ die „bedingte Varianz“ von $X \in L^2$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{V}\mathrm{ar}[X|\mathcal{F}]] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]].$$

Lösung. Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}[X \mid \mathcal{F}] &= \mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{F}] - 2\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \mid \mathcal{F}] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]^2 \mid \mathcal{F}] \\
&= \mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{F}] - 2\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \cdot \mathbb{E}[F|\mathcal{F}] + \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{F}] - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]^2.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathbb{E}[\mathbb{V}\mathrm{ar}[X \mid \mathcal{F}]] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]^2\right] \tag{1}$$

und

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]^2\right] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]]^2 = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]^2\right] - \mathbb{E}[X]^2. \tag{2}$$

Addieren von (1) und (2) liefert die Behauptung.

Aufgabe Ü12.8

Seien $X > 0, Y$ Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte f und $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X \mid Y - aX = b]$,

(b) $\mathbb{E}[X \mid \frac{Y-b}{X} = a]$

(c) und erklären Sie, wieso man im Allgemeinen verschiedene Ergebnisse erhält.

Lösung. Mit der Notation $Z_1 = Y - aX$ und $Z_2 = (Y - b)/X$ sehen wir mittels

$$\begin{aligned}
P(X \leq c_1, Z_1 \leq c_2) &= \int_0^{c_1} \int_{-\infty}^{c_2 + ax} f(x, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_0^{c_1} \int_{-\infty}^{c_2} f(x, y + ax)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x, \\
P(X \leq c_1, Z_2 \leq c_2) &= \int_0^{c_1} \int_{-\infty}^{c_2 x + b} f(x, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_0^{c_1} \int_{-\infty}^{c_2} x f(x, yx + b)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

dass

$$f_{X,Z_1}(u,v) = f(u, au+v), \qquad f_{X,Z_2}(u,v) = uf(u, uv+b).$$

Wegen $\mathbb{E}[X \mid Z_i] = h(Z_i)$ (siehe Lemma 1 in Z12.1) mit

$$h(v) = \frac{\int u f_{X,Z_i}(u,v)\,\mathrm{d}u}{\int f_{X,Z_i}(u,v)\,\mathrm{d}u}$$

folgt also

$$\mathbb{E}[X \mid Z_1 = b] = \frac{\int uf(u, au+b)\,\mathrm{d}u}{\int f(u, au+b)\,\mathrm{d}u}, \quad \mathbb{E}[X \mid Z_2 = a] = \frac{\int u^2 f(u, au+b)\,\mathrm{d}u}{\int uf(u, au+b)\,\mathrm{d}u},$$

was im Allgemeinen nicht identisch ist. Man ahnt, und kann zumindest für stetige Dichten mit beschränktem Träger auch leicht zeigen, dass

$$\mathbb{E}[X \mid Z_1 = b] = \lim_{h\to 0} \mathbb{E}[X \mid Z \in [b, b+h]], \quad \mathbb{E}[X \mid Z_2 = a] = \lim_{h\to 0} \mathbb{E}[X \mid Z \in [a, a+h]].$$

Dies zeigt, warum die beiden Größen verschieden sind: Im ersten Fall bedingt man darauf, dass X und Y auf der durch $y = ax + b$ gegebenen Geraden oder einer um bis zu h parallel verschobenen Geraden liegen (und lässt dann h gegen 0 gehen); im zweiten Fall lautet die Bedingung, dass X und Y auf der durch $y = ax + b$ gegebenen Geraden oder einer Geraden, die ebenfalls durch $(0; b)$ läuft, deren Steigung aber um bis zu h verändert ist, liegen.

Aufgabe Ü12.9

Bestimmen Sie $\mathbb{E}\Big[X \mid \sigma\big(\{[0, \frac{1}{2})\}\big)\Big]$, wobei $X : \omega \mapsto \omega$ die Identität auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathcal{U}_{(0,1)})$ ist.

Lösung. Es sei vermerkt, dass $\sigma\big(\{[0, \frac{1}{2})\}\big) = \Big\{\emptyset, [0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1], [0,1]\Big\}$. Insbesondere bilden $A = [0, \frac{1}{2}), B = [\frac{1}{2}, 1]$ eine Partition mit $P(A) = \frac{1}{2} = P(B)$. Für die bedingte Erwartung gilt also

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X \mid \sigma\big(\{[0, \tfrac{1}{2})\}\big)\right] &= \mathbb{E}[X \mid A] \cdot \mathbb{1}_A + \mathbb{E}[X \mid B] \cdot \mathbb{1}_B \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[X \cdot \mathbb{1}_A\right]}{P(A)} \cdot \mathbb{1}_A + \frac{\mathbb{E}\left[X \cdot \mathbb{1}_B\right]}{P(B)} \cdot \mathbb{1}_B \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{d}x \cdot \mathbb{1}_A + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 x\,\mathrm{d}x \cdot \mathbb{1}_B = \frac{1}{4} \cdot \mathbb{1}_A + \frac{3}{4} \cdot \mathbb{1}_B.
\end{aligned}$$