Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 12

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z12.1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien X, Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f(x,y)$. Ferner gelte $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Definiere

$$\mu(y, A) := \frac{\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass $\mu(Y(\omega), A)$ eine reguläre Version der Verteilung von X gegeben $\sigma(Y)$ ist.

Aufgabe Z12.2

(a) Seien A und B unabhängige, zu Parametern α und β Poisson-verteilte Zufallsvariablen. Berechnen Sie $\mathbb{E}[A \mid A+B]$.

(b) Seien $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. und integrierbar. Weiterhin sei $S_n = \sum_{i=1}^n S_i$. Zeigen Sie für alle $1 \leq i \leq n$, dass

$$\mathbb{E}[X_i \mid S_n] = \tfrac{1}{n} S_n \quad P\text{-f.s.}$$

Aufgabe Z12.3

Finden Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, eine Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}^1(P)$ sowie Teil-σ-Algebren $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$, sodass weder $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ noch $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ und

$$P\Big(\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \mid \mathcal{H}] \neq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] \mid \mathcal{G}]\Big) > 0.$$

(*Hinweis*: Betrachten Sie für die Wahl von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ σ-Algebren der Form $\sigma(A)$, wobei A ein Ereignis in $\mathcal{A}$ sei.)

Aufgabe Z12.4

Seien X und Y unabhängig und auf $[0, a]$ mit $a > 0$ gleichverteilt. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von $X \vee Y := \max\{X, Y\}$ und $X \wedge Y := \min\{X, Y\}$ und berechnen Sie daraus $\mathbb{E}[X \mid X \vee Y]$.

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü12.5

Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X \mid X^2]$ für $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ standardnormalverteilt.

Aufgabe Ü12.6

Vervollständigen Sie den Beweis zu Satz 8.6 der Vorlesung: Zeigen Sie

(C) $\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathcal{F}] = a\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]$ für $a, b \in \mathbb{R}$,

(I) $X, Y \in L^2, Y$ $\mathcal{F}$-messbar $\Longrightarrow$ Der Ausdruck $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$ wird minimiert von $Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$,

(J) $|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]| \leq \mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{F}]$,

(K) φ konvex $\Longrightarrow \varphi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{F}]$.

Aufgabe Ü12.7

Sei $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X|\mathcal{F}] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2|\mathcal{F}]$ die „bedingte Varianz" von $X \in L^2$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{V}\mathrm{ar}[X|\mathcal{F}]] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]].$$

Aufgabe Ü12.8

Seien $X > 0, Y$ Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte f und $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X \mid Y - aX = b]$,

(b) $\mathbb{E}[X \mid \frac{Y-b}{X} = a]$

(c) und erklären Sie, wieso man im Allgemeinen verschiedene Ergebnisse erhält.

Aufgabe Ü12.9

Bestimmen Sie $\mathbb{E}\Big[X \mid \sigma(\{[0, \frac{1}{2})\})\Big]$, wobei $X : \omega \mapsto \omega$ die Identität auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathcal{U}_{(0,1)})$ ist.