Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 11

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z11.1

Gegeben sei ein unabhängiges $\triangle$-Schema $\left((X_{n,l})_{l=1}^{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{E}[X_{n,l}] =: \mu_{n,l}$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_{n,l}] =: \sigma_{n,l}^2$ sowie $s_n^2 := \sum_{l=1}^{k_n} \sigma_{n,l}^2$. Die Lyapunov-Bedingung für dieses $\triangle$-Schema besagt

$$\exists \delta > 0 : \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{l=1}^{k_n} \mathbb{E}\left[|X_{n,l} - \mu_{n,l}|^{2+\delta}\right] = 0.$$

Zeigen Sie, dass die Lyapunov-Bedingung die Lindeberg-Bedingung impliziert.

Aufgabe Z11.2

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig identisch verteilt mit $\mathbb{E}[X_1] = 0, \mathbb{E}[X_1^2] = 1$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P} \mathcal{N}(0,1).$$

Aufgabe Z11.3

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig identisch verteilt mit Dichte $f_{X_1}(x) = |x|^{-3} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]}(x)$. Bestimmen Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass

$$\frac{S_n}{a_n} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0,1).$$

Hinweis: X_1 hat keine Varianz. Gehen Sie vor wie im Beweis des starken Gesetzes der großen Zahlen: Schneiden Sie geeignet ab!

Aufgabe Z11.4

Sei $X_n \sim \mathrm{Ber}(1/n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und sei $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{S_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0,1).$$

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü11.5

Angenommen, $\sqrt{n}(X_n - \vartheta) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ und g ist stetig differenzierbar. Was ist der schwache Grenzwert von $\sqrt{n}(g(X_n) - g(\vartheta))$?

Aufgabe Ü11.6

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P(X_n = 2^n) = \frac{1}{2} = P(X_n = -2^n)$ und setze $S_n = \sum_{k=1}^n S_k$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$\frac{S_n}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}[S_n]}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Aufgabe Ü11.7

Sei $S_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$ mit $p_n = n^{-a}$ und $a > 0$. Wann ist die Normalapproximation besser und wann die Poissonapproximation?

Aufgabe Ü11.8

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \qquad P(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}.$$

Zeigen Sie, dass $\left(X_k/\sqrt{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}, 1\le k\le n}$ mit $a_n := \sum_{k=1}^n (2 - k^{-2})$ ein zentriertes, normiertes, unabhängiges Dreiecksschema ist, aber

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{a_n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}\left(0, \tfrac{1}{2}\right) \quad (n \to \infty).$$