Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 10: Lösungen

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z10.1

Sei X eine Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$. Zeigen Sie:

1. $\varphi_X(0) = 1$.
2. Für $t \in \mathbb{R}$ ist $\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$.
3. $P_X = P_{-X} \Leftrightarrow \varphi_X \in \mathbb{R}$.
4. Für $t \in \mathbb{R}$ ist $|\varphi_X(t)| \leq 1$ und φ_X ist gleichmäßig stetig.
5. Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$.
6. X, Y unabhängig $\implies$ $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

Lösung.

1. Nach Definition.
2. Es ist $\varphi_{-X}(t) = \mathbb{E}[e^{i(-t)X}] = \mathbb{E}[\cos(-tX) + i\sin(-tX)] = \mathbb{E}[\cos(tX) - i\sin(tX)]$.
3. $\Rightarrow$ $\varphi_X = \varphi_{-X} \overset{(2.)}{=} \overline{\varphi_X} \;\Rightarrow\; \varphi_X \in \mathbb{R}$.
   $\Leftarrow$ Erneut nach (b) ist $\varphi_X = \varphi_{-X}$ und da nach Korollar 6.6 $\{e^{itx} : t \in \mathbb{R}\}$ trennende Familie ist, folgt $P_X = P_{-X}$.
4. Es ist $|\varphi_X(t)| \leq \mathbb{E}[|e^{itX}|] = 1$. Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned} \varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| &= \left|\mathbb{E}[e^{i(t+h)X}] - \mathbb{E}[e^{itX}]\right| = \left|\mathbb{E}\left[e^{itX}(e^{ihX} - 1)\right]\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left[\left|e^{ihX} - 1\right|\right] \xrightarrow{h\to 0} 0. \end{aligned}$$

5. Es gilt

$$\varphi_{aX+b}(t) = \mathbb{E}\left[e^{ibt}e^{iatX}\right] = e^{ibt}\mathbb{E}[e^{iatX}].$$

6. Es gilt

$$\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX} \cdot e^{itY}\right] \overset{X,Y \text{ unabh.}}{=} \mathbb{E}[e^{itX}] \cdot \mathbb{E}[e^{itY}] = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t).$$

Aufgabe Z10.2

Sei X eine Zufallsvariable mit $\phi_X(t) = e^{-|t|}$.

1. Bestimmen Sie die Verteilung von X.
2. Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt wie X. Bestimmen Sie mit Hilfe von charakteristischen Funktionen die Verteilung von $n^{-1}S_n$, wobei $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Lösung.

1. Wir wenden Korollar 6.7 an und erhalten
$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx-|t|}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-itx+t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-itx-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-ix)t}}{1-ix}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(-1-ix)t}}{-1-ix}\right]_0^\infty = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1+ix+1-ix}{(1-ix)(1+ix)}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$
Dies ist die aus Z8.2 bekannte Cauchy-Verteilung.

2. Mit Z10.1 erhalten wir
$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \varphi_{S_n}(t/n) = (\varphi_{X_1}(t/n))^n = \left(e^{-|t|/n}\right)^n = e^{-|t|}.$$
Es ist also S_n/n wieder Cauchy-verteilt. Dies löst Aufgabe Z8.2 auf erheblich einfacherem Weg.

Aufgabe Z10.3

Sei X eine Zufallsvariable, $u > 0$. Zeigen Sie, dass
$$P(|X| > 2u^{-1}) \le u^{-1}\int_{-u}^{u}(1-\phi_X(t))dt.$$

Lösung. Wir beginnen mit der Beobachtung, dass
$$\int_{-u}^{u} 1 - e^{itx}\,\mathrm{d}t = 2u - \int_{-u}^{u}(\cos tx + i\sin tx)\,\mathrm{d}t = 2u - \frac{2\sin ux}{x}.$$
Wir teilen nun durch u und integrieren beide Seiten nach $P_X(\mathrm{d}x)$. Mit Fubini gilt dann
$$2\int\left(1-\frac{\sin ux}{ux}\right)P_X(\mathrm{d}x) = u^{-1}\int_{-u}^{u}\int(1-e^{itx})P_x(\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}t = u^{-1}\int_{-u}^{u}(1-\phi_X(t))\,\mathrm{d}t.$$
Um die linke Seite nach unten abzuschätzen, bemerken wir, dass $|\sin x| = |\int_0^x \cos(y)\,\mathrm{d}y| \le |x|$ für beliebiges x und daher $1 - \frac{\sin(ux)}{ux} \ge 0$. Wir können also den Integrationsbereich einschränken und erhalten
$$\begin{aligned} 2\int\left(1-\frac{\sin ux}{ux}\right)P_X(\mathrm{d}x) &\ge 2\int_{|x|\ge 2/u}\left(1-\frac{\sin ux}{ux}\right)P_X(\mathrm{d}x) \\ &\ge 2\int_{|x|\ge 2/u}\left(1-\left|\frac{\sin ux}{ux}\right|\right)P_X(\mathrm{d}x) \\ &\ge 2\int_{|x|\ge 2/u}\left(1-\frac{1}{|ux|}\right)P_X(\mathrm{d}x) \\ &\ge 2\int_{|x|\ge 2/u}\tfrac{1}{2}P_X(\mathrm{d}x) = P(|X| > 2/u). \end{aligned}$$

Aufgabe Z10.4

Für $k, n \in \mathbb{N}$ sei $Y_{n,k}$ binomialverteilt mit Parameter n und $n^{-1}2^{-k}$ und unabhängig. (Eine Zufallsvariable Z ist binomialverteilt mit Parameter N und p falls $P(Z = \ell) = \binom{N}{\ell} p^\ell (1 - p)^{N-\ell}$ für $\ell \in \{0, \dots, N\}$.) Sei $S_n = Y_{n,1} + \cdots + Y_{n,n}$. Zeigen Sie, dass S_n in Verteilung konvergiert, und bestimmen Sie diese Verteilung.

Lösung. Wir wissen nach Ü10.5, dass $\varphi_{\mathrm{Ber}(p)}(t) = 1 - p + pe^{it}$ und nach Z10.1.6 folgt also $\varphi_{\mathrm{Bin}(n,p)}(t) = (1 - p + pe^{it})^n$. Mit der Unabhängigkeit der $Y_{n,k}$ folgt

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_n}(t) &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{2^{-k}}{n}\left(e^{it} - 1\right)\right)^n = \prod_{k=1}^n \left(e^{2^{-k}(e^{it}-1)} + o(1)\right) \\
&= \exp\left((e^{it} - 1)\sum_{k=1}^n 2^{-k}\right) + o(1) = \exp\left((e^{it} - 1)(1 - 2^{-n})\right) + o(1) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \exp\left(e^{it} - 1\right).
\end{aligned}$$

Nun sehen wir direkt ein, dass e^{it} die charakteristische Funktion der konstanten Zufallsvariable $X \equiv 1$ ist. Nach Ü10.7.1 folgt also, dass $\lim_{n\to\infty} \varphi_{S_n}$ die charakteristische Funktion der Zufallsvariablen $Y = \sum_{k=1}^N 1 = N$ mit $N \sim \mathrm{Poi}(1)$ ist, also $Y \sim \mathrm{Poi}(1)$. Diese Erkenntnis ergibt sich alternativ auch direkt aus Ü10.5.

Lösung 2. Wir zeigen erneut $\varphi_{S_n}(t) \to \exp(e^{it} - 1)$, der Rest ist wie in Lösung 1. Mit demselben Ansatz wie in Lösung 1 und zusätzlichem Logarithmieren erhalten wir

$$\log(\varphi_{S_n}(t)) = \sum_{k=1}^n n \log(1 - p + pe^{it}).$$

Wir setzen $\alpha_k(t) := 2^{-k}(e^{it} - 1)$ und bemerken, dass $|\frac{\alpha_k(t)}{n}| < \frac{1}{2}$ für n hinreichend groß. Da für alle $z \le 1/2$ die Ungleichung $|\log(1 + z) - z| \le z^2$ gilt, ergibt sich

$$\left|\log \varphi_{S_n}(t) - \sum_{k=1}^n \alpha_k(t)\right| \le \sum_{k=1}^n n\left|\log\left(1 + \frac{\alpha_k(t)}{n}\right) - \frac{\alpha_k(t)}{n}\right| \le \sum_{k=1}^n \frac{|\alpha_k(t)|^2}{n} \le \frac{4}{3n},$$

wobei für die letzte Abschätzung einerseits benutzt wurde, dass $|e^{it} - 1|^2 \le 4$, und andererseits, dass $\sum_{k=1}^n 2^{-2k} \le \frac{1}{3}$.
Da $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) = e^{it} - 1$, ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}
|\log \varphi_{S_n}(t) - (e^{it} - 1)| &\le \left|\log \varphi_{S_n}(t) - \sum_{k=1}^n \alpha_k(t)\right| + \left|\sum_{k=1}^n \alpha_k(t) - (e^{it} - 1)\right| \\
&\le \frac{4}{3n} + \left|\sum_{k=1}^n \alpha_k(t) - (e^{it} - 1)\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü10.5

Berechnen Sie die charakteristische Funktion einer Bernulliverteilten Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$, einer Poissonverteilten Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$ und einer auf dem Intervall (a, b) uniformverteilten Zufallsvariable.

Lösung

- Sei X Bernoulli-p-verteilt. Dann gilt

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = pe^{it} + 1 - p.$$

- Sei X Poisson-λ-verteilt. Dann gilt

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} e^{itk} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{it}\right)^k}{k!} = e^{-\lambda+\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

- Sei X auf (a,b) gleichverteilt, es ist also $f_X(t) = (b-a)^{-1} \cdot \mathbb{1}_{(a,b)}(t)$ die Lebesgue-Dichte von X. Damit gilt für $t \neq 0$, dass

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{itx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \frac{e^{itx}}{it} \bigg|_{x=a}^{b} = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{(b-a)it}.$$

  Außerdem ist $\varphi_X(0) = 1$.

Aufgabe Ü10.6

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $0 < \sigma^2 < \infty$. Sei $Y_n = X_n + 2^{-n}$ und $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Zeigen Sie, dass $n^{-1/2}(S_n - \mu n)$ in Verteilung konvergiert, und bestimmen Sie die Grenzverteilung.

Lösung. Es ist

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_n + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{n} X_n + 1 - 2^{-n},$$
$$\varphi_{S_n}(t) = \mathbb{E}\left[e^{it\sum_{k=1}^{n} X_k}\right] e^{it(1-2^{-n})} = \varphi_{X_1}(t)^n \cdot e^{it(1-2^{-n})}.$$

Wir gehen ananlog zum Beweis des zentralen Grenzwertsatzes vor und nehmen o.B.d.A. $\mu = 0$ an. Dann ist

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Die gesuchte Grenzverteilung ist also $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

Aufgabe Ü10.7

1. Sei ϕ eine charakteristische Funktion. Zeigen Sie, dass $e^{\phi-1}$ ebenfalls eine charakteristische Funktion ist.
2. Zeigen Sie, dass e^{t^4} keine charakteristische Funktion ist.

Lösung.

1. Sei φ die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen X. Wir verwenden die Reihendarstellung der Exponentialfunktion, um

$$\exp(\varphi - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{k!} \varphi^k$$

zu schreiben. Dabei entspricht $e^{-1}/k! = \mathrm{Poi}_1(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und φ^k ist die charakteristische Funktion der Summe von k unabhängigen Kopien von X.

Dies sind zielführende Beobachtungen: Seien $N, X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei N zum Parameter 1 Poisson-verteilt und die X_k's unabhängige Kopien von X seien. Definiere die zufällige Summe $Y = \sum_{k=1}^N X_k$, dann gilt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz und unter Ausnutzung der Unabhängigkeit für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left(it\sum_{k=1}^N X_k\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{n=0}^\infty \mathbb{1}_{\{N=n\}}\sum_{k=1}^n itX_k\right)\right] \\ &= \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{N=n\}}\prod_{k=1}^n \exp(itX_k)\right] \\ &= \sum_{n=0}^\infty P(N=n)\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n \exp(itX_k)\right] = \sum_{n\geq 0}\frac{e^{-1}}{n!}\varphi(t)^n.\end{aligned}$$

2. Sei $f(t) = e^{t^4}$ und nehme an, f ist die charakteristische Funktion einer Zuvallsvariablen X. Dann ist $f'(t) = 4t^3e^{t^4}$ und $f''(t) = (3+4t^4)\cdot 4t^2e^{t^4}$. Insbesondere ist $f''(0) = 0$. Nach Satz 6.4 ist also $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Nach Satz 6.3 wiederum gilt, dass $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^2] = 0$, also $X = 0$ f.s. Doch dies impliziert $\varphi_X(t) = 1 \neq f(t)$.

Aufgabe Ü10.8

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $0 < \sigma^2 < \infty$, und sei $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$, sei

$$h_n(\alpha) = P(S_n \leq \alpha n).$$

Bestimmen Sie $h = \lim_{n\to\infty} h_n$.

Lösung. Nach dem (schwachen) GGZ gilt $S_n/n \xrightarrow{P} \mu$. und insbesondere $P(S_n/n \leq \alpha) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für alle $\alpha < \mu$ und $P(S_n/n \leq \alpha) \xrightarrow{n\to\infty} 1$ für alle $\alpha > \mu$.
Sei nun also $\alpha = \mu$. Dann gilt mit dem zentralen Grenzwertsatz, dass

$$P(S_n \leq n\alpha) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{\alpha n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq 0\right) \xrightarrow{n\to\infty} \mathcal{N}_{0,1}((-\infty, 0]) = \frac{1}{2}.$$

Insgesamt folgt also $h = \frac{1}{2}\cdot\mathbb{1}_{\{\mu\}} + \mathbb{1}_{(\mu,\infty)}$.