Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 10

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z10.1

Sei X eine Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$. Zeigen Sie:

1. $\varphi_X(0) = 1$.
2. Für $t \in \mathbb{R}$ ist $\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$.
3. $P_X = P_{-X} \Leftrightarrow \phi_X \in \mathbb{R}$.
4. Für $t \in \mathbb{R}$ ist $|\phi_X(t)| \leq 1$ und ϕ_X ist gleichmäßig stetig.
5. Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist $\phi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$.
6. X, Y unabhängig $\implies \varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

Aufgabe Z10.2

Sei X eine Zufallsvariable mit $\phi_X(t) = e^{-|t|}$.

1. Bestimmen Sie die Verteilung von X.
2. Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt wie X. Bestimmen Sie mit Hilfe von charakteristischen Funktionen die Verteilung von $n^{-1}S_n$, wobei $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Aufgabe Z10.3

Sei X eine Zufallsvariable, $u > 0$. Zeigen Sie, dass

$$P(|X| > 2u^{-1}) \leq u^{-1} \int_{-u}^{u} (1 - \phi_X(t))dt.$$

Aufgabe Z10.4

Für $k, n \in \mathbb{N}$ sei $Y_{n,k}$ binomialverteilt mit Parameter n und $n^{-1}2^{-k}$ und unabhängig. (Eine Zufallsvariable Z ist binomialverteilt mit Parameter N und p falls $P(Z = \ell) = \binom{N}{\ell}p^\ell(1-p)^{N-\ell}$ für $\ell \in \{0, \ldots, N\}$.) Sei $S_n = Y_{n,1} + \cdots + Y_{n,n}$. Zeigen Sie, dass S_n in Verteilung konvergiert, und bestimmen Sie diese Verteilung.

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü10.5

Berechnen Sie die charakteristische Funktion einer Bernulliverteilten Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$, einer Poissonverteilten Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$ und einer auf dem Intervall (a, b) uniformverteilten Zufallsvariable.

Aufgabe Ü10.6

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $0 < \sigma^2 < \infty$. Sei $Y_n = X_n + 2^{-n}$ und $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Zeigen Sie, dass $n^{-1/2}(S_n - \mu n)$ in Verteilung konvergiert, und bestimmen Sie die Grenzverteilung.

Aufgabe Ü10.7

1. Sei ϕ eine charakteristische Funktion. Zeigen Sie, dass $e^{\phi-1}$ ebenfalls eine charakteristische Funktion ist.
2. Zeigen Sie, dass e^{t^4} keine charakteristische Funktion ist.

Aufgabe Ü10.8

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $0 < \sigma^2 < \infty$, und sei $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$, sei

$$h_n(\alpha) = P(S_n \leq \alpha n).$$

Bestimmen Sie $h = \lim_{n\to\infty} h_n$.