Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 9: Lösungen

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z9.1

Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und X Zufallsvariablen sowie $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) $X_n \xrightarrow{P} X \implies X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$;

(ii) $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} c \implies X_n \xrightarrow{P} c$;

(iii) $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} c$ und $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Y \implies X_n + Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Y + c$;

(iv) Sei $P_{Y_n} = \mathcal{N}_{0,\frac{1}{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ genau dann, wenn $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

Lösung.

(i) Sei f beschränkt und gleichmäßig stetig. Wir zeigen, dass

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X)]$$

was nach Satz 5.2 (Portmanteau) die Aussage impliziert. Da f beschränkt und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, sind die Erwartungswerte wohldefiniert. Da f gleichmäßig stetig ist, können wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden, so dass

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

gilt. Hiermit erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[f(X_n) - f(X)]| &\le \mathbb{E}[|f(X_n) - f(X)|] \\
&= \mathbb{E}\left[|f(X_n) - f(X)| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \ge \delta\}} + |f(X_n) - f(X)| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n - X| < \delta\}}\right] \\
&\le 2 \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \cdot P(|X_n - X| \ge \delta) + \mathbb{E}[\varepsilon \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n - X| < \delta\}}] \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \varepsilon.
\end{aligned}$$

(ii) Die Verteilungsfunktion von c ist $F_c(x) = \mathbb{1}_{[c,\infty)}(c)$, die an allen Stellen außer an c selbst stetig ist (insbesondere an $c \pm \varepsilon$. Also folgt für $\varepsilon > 0$ nach Satz 5.2

$$P(X_n < c - \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad P(X_n \le c + \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
P(|X_n - c| > \varepsilon) &= P(X_n < c - \varepsilon) + P(X_n > c + \varepsilon) \\
&= 1 - P(X_n \ge c + \varepsilon) + P(X_n < c - \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 1 - 1 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

(iii) Wir wollen zeigen, dass für eine beschränkte und gleichmäßig stetige Funktion f

$$\mathbb{E}[f(X_n+Y_n)-f(c+Y)] \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

gilt. Da f gleichmäßig stetig ist, können wir zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ finden, sodass $|x-y|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Wegen Teil (ii) gilt $X_n \xrightarrow{P} c$ und wegen (iv) in Satz 5.2 gilt $c+Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} c+Y$ somit

$$\begin{aligned}
0 &\le |\mathbb{E}[f(X_n+Y_n)-f(c+Y)]| \\
&\le |\mathbb{E}[f(X_n+Y_n)-f(c+Y)\mathbb{1}_{|X_n-c|<\delta}]| + |\mathbb{E}[f(X_n+Y_n)-f(c+Y)\mathbb{1}_{|X_n-c|\ge\delta}]| \\
&\le |\mathbb{E}[(f(c+Y_n)-f(c+Y))\mathbb{1}_{|X_n-c|<\delta}]| + \varepsilon + |\mathbb{E}[(f(X_n+Y_n)-f(c+Y))\mathbb{1}_{|X_n-c|\ge\delta})| \\
&\le |\mathbb{E}[f((c+Y_n)-f(c+Y))\mathbb{1}_{|X_n-c|<\delta}]| + \varepsilon + 2\sup_x |f(x)|\mathbb{E}[\mathbb{1}_{|X_n-c|\ge\delta}] \\
&= |\underbrace{\mathbb{E}[f(c+Y_n)\mathbb{1}_{|X_n-c|<\delta}] - \mathbb{E}[f(c+Y)\mathbb{1}_{|X_n-c|<\delta}]}_{\xrightarrow{(*)}0}| + \varepsilon + 2\sup_x |f(x)|\underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{|X_n-c|\ge\delta}]}_{\to 0} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Es ist also noch $(*)$ zu zeigen. Hierfür beobachten wir zuerst, dass einerseits nach majorisierter Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(c+Y)\mathbb{1}_{|X_n-c|<\delta}] = \mathbb{E}[f(c+Y)]$$

gilt und dass andererseits

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{E}[f(c+Y_n)\mathbb{1}_{|X_n-c|<\delta}] - \mathbb{E}[f(c+Y)]| \\
&\qquad = |\mathbb{E}[f(c+Y_n)] - \mathbb{E}[f(c+Y_n)\mathbb{1}_{|X_n-c|\ge\delta}] - \mathbb{E}[f(c+Y)]| \\
&\qquad \le |\mathbb{E}[f(c+Y_n)] - \mathbb{E}[f(c+Y)]| + |\mathbb{E}[f(c+Y_n)\mathbb{1}_{|X_n-c|\ge\delta}]| \\
&\qquad \le \underbrace{|\mathbb{E}[f(c+Y_n)] - \mathbb{E}[f(c+Y))]}_{\to 0} + \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \underbrace{P(|X_n-c|\ge\delta)}_{\to 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

(iv) Es ist $\mathbb{E}[Y_n^2] = \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_n) \to 0$, also $Y_n \xrightarrow{L^2} 0$ und insbesondere $Y_n \xrightarrow{P,\mathrm{d}} 0$. Die Behauptung folgt direkt mit (iii) bzw., indem wir (iii) auf X_n+Y_n sowie $-Y_n$ anwenden.

Aufgabe Z9.2

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X$ Zufallsvariablen mit zugehörigen Verteilungsfunktionen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}, F$. Sei weiterhin F stetig. Zeigen Sie

$$X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x)-F(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Lösung. Die Implikation '$\Leftarrow$' folgt aus Satz 5.4. Für die andere Implikation können wir mir der Stetigkeit von F und Satz 5.4 die punktweise Konvergenz von F_n gegen F annehmen. Zu zeigen ist gleichmäßige Konvergenz.
Sei hierfür $\varepsilon>0$ und wähle $N\in\mathbb{N}$ so, dass $1/N<\varepsilon$. Da F stetig ist, existieren (nicht notwendigerweise eindeutig bestimmte) Stellen t_k mit

$$F(t_k) = \frac{k}{N}, \quad k=1,\dots,N-1.$$

Da es sich hier nur um endlich viele Stellen handelt, können wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ wählen mit

$$|F_n(t_k) - F(t_k)| \leq \varepsilon \quad \forall 1 \leq k \leq N-1, n \geq n_0.$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt entweder $-\infty < x \leq t_1, t_{N-1} \leq x < \infty$ oder es gibt ein k mit $t_k \leq x \leq t_{k+1}$. Wir behandeln nur den letzten Fall, die beiden ersten behandelt man völlig analog. Gelte also $t_k \leq x \leq t_{k+1}$. Dann folgt aufgrund der Monotonie der jeweiligen Funktionen

$$F_n(x) - F(x) \geq F_n(t_k) - F(t_{k+1}) \geq F_n(t_k) - F(t_k) + F(t_k) - F_(t_{k+1} \geq -\varepsilon - \frac{1}{N}$$
$$F_n(x) - F(x) \leq F_n(t_{k+1}) - F(t_k) \leq F_n(t_{k+1}) - F(t_{k+1}) + F(t_{k+1}) - F_(t_k \leq \varepsilon + \frac{1}{N}$$

für alle $n \geq n_0$. Insgesamt folgt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \leq \varepsilon + \frac{1}{N} \leq 2\varepsilon.$$

Aufgabe Z9.3

(a) Es bezeichne $\mathcal{M}$ die Menge aller auf $\mathbb{Z}$ getragenen Maße. Zeigen Sie, dass eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ genau dann einen schwachen Grenzwert $\mu \in \mathcal{M}$ hat, wenn $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\{z\}) = \mu(\{z\})$ für alle $z \in \mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Behauptung falsch wird, wenn man $\mathcal{M}$ durch die Menge aller diskreten Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ ersetzt.

Lösung.

(a) $\Rightarrow$ Für $z \in \mathbb{Z}$ ist $z \pm 1/2$ ein Stetigkeitspunkt der zugehörigen Verteilungsfunktion, also

$$\mu_n(\{z\}) = \mu_n\{(-\infty, z+1/2]\} - \mu_n\{(-\infty, z-1/2]\}$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} \mu\{(-\infty, z+1/2]\} - \mu\{(-\infty, z-1/2]\} = \mu(\{z\})$$

$\Leftarrow$ Sei $\varepsilon > 0$ und $I = \{z_1, \ldots, z_m\} \subset \mathbb{Z}$ so, dass $\mu(I) \geq 1 - \varepsilon$. Sei weiterhin N groß genug, sodass für alle $n \geq N$

$$|\mu_n(\{z_i\}) - \mu(\{z_i\})| \leq \tfrac{\varepsilon}{m} \quad \forall\, 1 \leq i \leq m$$

gilt. Definiere außerdem für $k \in \mathbb{Z}$ die Menge $I_k := I \cap (-\infty, k]$ und $J_k := (\mathbb{Z} \setminus I) \cap (-\infty, k]$ als die Menge ganzer Zahlen $\leq k$, die nicht in I_k enhalten ist. Mit der Dreiecksungleichung bzw. nach Wahl der z_i gilt nun

$$|\mu_n(I_k) - \mu(I_k)| \leq \varepsilon, \quad \mu(J_k) \leq \varepsilon, \quad \mu_n(J_k) \leq 2\varepsilon$$

für $n \geq N$. Kombinieren wir diese drei Ungleichungen, erhalten wir

$$|\mu_n((-\infty, k]) - \mu((-\infty, k])| \leq 3\varepsilon.$$

Da ε beliebig war, folgt $\mu_n((-\infty, k]) \xrightarrow{n\to\infty} \mu((-\infty, k])$. Da die Verteilungsfunktion an nicht ganzzahligen Stellen konstant ist, folgt die Behauptung mit Satz 5.4

(b) Wir wählen $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \delta_{\frac{k}{n}}$, also die Gleichverteilung auf den Punkten $\frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}$. Diese konvergiert schwach gegen $\mathcal{U}_{(0,1]} \notin \mathcal{M}$.

Aufgabe Z9.4

Zeigen Sie: Wenn a_n eine reelle Nullfolge ist und $\frac{X_n}{a_n}$ einen schwachen Grenzwert hat, dann $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Lösung. Seien $\varepsilon, M > 0$ beliebig und sei Z der schwache Grenzwert von X_n/a_n. Wähle $m \in \mathbb{N}$ groß genug, sodass für alle $n \geq m$ die Ungleichung $\varepsilon/a_n \geq M$ gilt.
Wähle weiterhin ein $f \in C_b(\mathbb{R})$, sodass $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ und

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-2M,2M]} \leq f \leq \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-M,M]}.$$

Hiermit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} P(|X_n| \geq \varepsilon) &= \limsup_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n}{a_n} \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{\varepsilon}{a_n}, \frac{\varepsilon}{a_n}\right]\right) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \int f(z) P_{\frac{X_n}{a_n}}(\,\mathrm{d}z) = \int f(z) P_Z(\,\mathrm{d}z) \\
&\leq \int \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-M,M]} P_Z(\,\mathrm{d}z) \\
&= P(|Z| > M) \xrightarrow{M\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü9.5

Zeigen Sie, dass sich jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ schwach durch die diskreten Maße $\mu_n := \sum_{z=-\infty}^{\infty} \mu((\frac{z}{n}, \frac{z+1}{n}])\delta_{\frac{z}{n}}$ approximieren lässt.

Lösung. Ziel: Prüfe die Definition schwacher Konvergenz für $f \in \{g \in C_b(\mathbb{R}) \mid g$ gleichmäßig stetig$\}$ nach. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $|x - y| \leq 1/m \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ gewählt. Für alle $n \geq m$ gilt demnach

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\mu_n - \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\mu\right| &= \left|\sum_{z=-\infty}^{\infty} \left(\int_{z/n}^{(z+1)/n} f \,\mathrm{d}\mu_n - \int_{z/n}^{(z+1)/n} f \,\mathrm{d}\mu\right)\right| && \text{(dom. Konvergenz)} \\
&= \left|\sum_{z=-\infty}^{\infty} \left(\mu\left(\left(\frac{z}{n}, \frac{z+1}{n}\right]\right) f\left(\frac{z}{n}\right) - \int_{z/n}^{(z+1)/n} f \,\mathrm{d}\mu\right)\right| \\
&\leq \sum_{z=-\infty}^{\infty} \left|\mu\left(\left(\frac{z}{n}, \frac{z+1}{n}\right]\right) f\left(\frac{z}{n}\right) - \int_{z/n}^{(z+1)/n} f \,\mathrm{d}\mu\right| && \text{(Dreiecksungl.)} \\
&\leq \sum_{z=-\infty}^{\infty} \mu\left(\left(\frac{z}{n}, \frac{z+1}{n}\right]\right) \underbrace{\left(\max_{z/n\leq y\leq(z+1)/n} f(y) - \min_{z/n\leq y\leq(z+1)/n} f(y)\right)}_{\leq\varepsilon} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Aufgabe Ü9.6

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen, und sei X exponentialverteilt mit Parameter 1. Zeigen Sie, dass $n\min_{1\leq j\leq n} X_j \xrightarrow{d} X$.

Lösung. Sei $c \geq 0$ und $c \leq n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(n\cdot \min_{1\leq j\leq n} X_j \leq c) &= 1 - P(\bigcap_{j=1}^{n} X_j > c/n) = 1 - P(X_1 > c/n)^n \\ &= 1-(1-c/n)^n \xrightarrow{n\to\infty} 1-e^{-c} = P(X\leq c). \end{aligned}$$

Aufgabe Ü9.7

Zeigen Sie: Eine Familie $\{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)\}_{(\mu,\sigma^2)\in I}$ von Gaußmaßen ist genau dann straff, wenn $I\subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}_0^+$ beschränkt ist.

Lösung.

$\Rightarrow$ Sei $M>0$ beliebig. Es ist

$$\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}([-M,M]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-M}^{M} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-M-\mu}{\sigma}}^{\frac{M-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Die Annahme, I sei unbeschränkt, impliziert einen von zwei Fällen: Im ersten Fall existiert eine Folge μ_n mit $|\mu_n| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ (wir nehmen o.B.d.A. an, dass $\mu_n \geq 0$). Insbesondere ist dann $\mu_n \geq M$ für alle hinreichend großen n, also

$$\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}([-M,M]) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Dies widerspricht der Straffheit. Im zweiten Fall existiert eine Folge (μ_n,σ_n^2), sodass μ_n beschränkt ist und $\sigma_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. In diesem Fall erhalten wir sogar

$$\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}([-M,M]) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

also ebenfalls ein Widerspruch.

$\Leftarrow$ Nach Annahme existiert $C>0$, sodass für alle Verteilungen $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ aus der Familie $|\mu|,\sigma^2 \leq C$ gilt. Für jedes $M\geq C$ folgt dann

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}([-M,M]) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-M-\mu}{\sigma}}^{\frac{M-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-M+C}{C}}^{\frac{M-C}{C}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{M\to\infty} 1 \end{aligned}$$

uniform in μ und σ^2, was die Straffheit der Familie zeigt.

Aufgabe Ü9.8

Sei X_n für $n\in\mathbb{N}$ zum Parameter p_n geometrisch verteilt. Für welche Folgen p_n konvergiert $\mathbb{P}_{\frac{X_n}{n}}$ schwach gegen eine Exponentialverteilung mit Parameter α?

Lösung. Sei $x \geq 0$. Es ist

$$\begin{aligned} P(X_n/n > x) &= P(X_n > xn) = P(X_n > \lfloor xn \rfloor) = (1-p_n)^{\lfloor xn \rfloor} \\ &= (1-p_n)^{xn}(1-p_n)^{-r(n,x)}, \end{aligned}$$

wobei $0 \leq r(n,x) \leq 1$. Damit diese Wahrscheinlichkeit nicht gegen Null konvergiert, muss $p_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und damit

$$P(X_n/n > x) \sim (1-p_n)^{xn} \sim e^{-p_n n x}.$$

Da für $X \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$ gilt, dass $P(X > x) = e^{-\alpha x}$, muss also $np_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$. Also muss p_n von der Form $p_n = \frac{\alpha}{n} + f(n)$ mit $f(n) = o(1/n)$ sein.

Aufgabe Ü9.9

Es gelte $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$. Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{E}[|X|] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|]$;

(ii) Wenn $p > 0$ und $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|^r] < \infty$ für ein $r > p$, dann $\mathbb{E}[|X|^p] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^p]$.

Lösung. Die Funktion $h(x) = |x|^p$ ist stetig und daher folgt $|X_n|^p \xrightarrow{\mathrm{d}} |X|^p$ mit Satz 5.5. Nach Aufgabe E2.12 gibt es Zufallsvariablen $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Y, sodass Y_n wie $|X_n|^p$ verteilt ist und Y wie $|X|^p$ und $Y_n \xrightarrow{\text{f.s.}} Y$.

(i) Mit $p = 1$ und dem Lemma von Fatou folgt, dass

$$\mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} Y_n] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n] = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|].$$

(ii) Sei $M := \sup_n \mathbb{E}[|X_n|^r]$. Wir behaupten zuerst, dass $|X_n|^p$ gleichmäßig integrierbar ist. Hierfür beobachten wir zuerst, dass $a(x) := M^{-1}x^{r-p} \xrightarrow{x\to\infty} \infty$, da $r > p$. Die Funktion $a(\cdot)$ ist sogar monoton steigend. Sei nun $N \in \mathbb{N}$ beliebig, so gilt

$$M \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X|^r] \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X|^r \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n|^p > N\}}] \geq a(N)M \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X|^p \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n|^p > N\}}],$$

also

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X|^p \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n|^p > N\}}] \leq \frac{1}{a(N)} \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Damit sind auch $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig integrierbar und mit Satz 4.9 folgt, dass

$$E[|X_n|^p] = \mathbb{E}[Y_n] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[|X|^p].$$

Aufgabe Ü9.10

Zeigen Sie, dass eine Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen genau dann straff ist, wenn eine derartige messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ existiert, dass $f(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f \, \mathrm{d}P_n < \infty$.

Lösung.

$\Rightarrow$ Sei $M_0 = 0$ und definiere

$$M_{k+1} := \inf\left\{M \geq M_k + 1 : \inf_{n\in\mathbb{N}} \{P_n([-M, M])\} \geq 1 - 2^{-k}\right\},$$
$$f(x) := \sum_{k\geq 0} k \cdot \mathbb{1}_{[M_k, M_{k+1}]}(|x|).$$

Beobachte, dass die M_k aufgrund der Straffheit der (P_n) wohldefiniert sind. Offenbar gilt nun $f(x) \xrightarrow{|x|\to\infty} \infty$ und zudem mit monotoner Konvergenz

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f \,\mathrm{d}P_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\geq 0} k \int \mathbb{1}_{[M_k, M_{k+1}]}(|x|)\,\mathrm{d}P_n \leq \sum_{k\geq 0} k2^{-k} < \infty.$$

$\Leftarrow$ Seien $n \in \mathbb{N}$ und $M > 0$ hinreichend groß; setze $K = [-M, M]$. Es ist

$$P_n(K^c) = \int \mathbb{1}_{K^c}(x) P_n(\,\mathrm{d}x) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \mathbb{1}_{K^c}(x) f(x) P_n(\,\mathrm{d}x) \xrightarrow{M\to\infty} 0.$$

Die Abschätzung gilt, da $f(x) \geq 1$ für $|x| \geq M$ groß genug. Die Konvergenz gegen Null gilt, da nach Annahme die L^1-Norm bzgl. P_n von f uniform in n beschränkt ist.