Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 9

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z9.1

Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und X Zufallsvariablen sowie $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) $X_n \xrightarrow{P} X \implies X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$;

(ii) $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} c \implies X_n \xrightarrow{P} c$;

(iii) $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} c$ und $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Y \implies X_n + Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Y + c$;

(iv) Sei $P_{Y_n} = \mathcal{N}_{0,\frac{1}{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ genau dann, wenn $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

Aufgabe Z9.2

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X$ Zufallsvariablen mit zugehörigen Verteilungsfunktionen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}, F$. Sei weiterhin F stetig. Zeigen Sie

$$X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Aufgabe Z9.3

(a) Es bezeichne $\mathcal{M}$ die Menge aller auf $\mathbb{Z}$ getragenen Wahrscheinlichkeitsmaße. Zeigen Sie, dass eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ genau dann einen schwachen Grenzwert $\mu \in \mathcal{M}$ hat, wenn $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\{z\}) = \mu(\{z\})$ für alle $z \in \mathbb{Z}$!

(b) Zeigen Sie, dass die Behauptung falsch wird, wenn man $\mathcal{M}$ durch die Menge aller diskreten Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ ersetzt.

Aufgabe Z9.4

Zeigen Sie: Wenn a_n eine reelle Nullfolge ist und $\frac{X_n}{a_n}$ einen schwachen Grenzwert hat, dann $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü9.5

Zeigen Sie, dass sich jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ schwach durch die diskreten Maße $\mu_n := \sum_{z=-\infty}^{\infty} \mu((\frac{z}{n}, \frac{z+1}{n}])\delta_{\frac{z}{n}}$ approximieren lässt!

Aufgabe Ü9.6

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen, und sei X exponentialverteilt mit Parameter 1. Zeigen Sie, dass $n \min_{1\leq j\leq n} X_j \xrightarrow{d} X$.

Aufgabe Ü9.7

Zeigen Sie: Eine Familie $\{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)\}_{(\mu,\sigma^2)\in I}$ von Gaußmaßen ist genau dann straff, wenn $I \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ beschränkt ist.

Aufgabe Ü9.8

Sei X_n für $n \in \mathbb{N}$ zum Parameter p_n geometrisch verteilt. Für welche Folgen p_n konvergiert $\mathbb{P}_{\frac{X_n}{n}}$ schwach gegen eine Exponentialverteilung mit Parameter α?

Aufgabe Ü9.9

Es gelte $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$. Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{E}(|X|) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n|)$;

(ii) Wenn $p > 0$ und $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|^r) < \infty$ für ein $r > p$, dann $\mathbb{E}(|X|^p) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n|^p)$.

Aufgabe Ü9.10

Zeigen Sie, dass eine Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen genau dann straff ist, wenn eine derartige messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ existiert, dass $f(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f \, \mathrm{d}P_n < \infty$.