Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 8: Lösungen

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z8.1

Sein $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, auf $[1,2]$ gleichverteilter Zufallsvariablen. Bestimmen Sie den f.s.-Grenzwert von

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Lösung. Wir wollen das starke Gesetz der großen Zahlen anwenden, also versuchen wir, das Produkt als Summe zu schreiben:

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\prod_{1\le i\le n} X_i\right)^{1/n}}_{\ge 0} = c \quad \text{f.s.} \qquad \iff \qquad \lim_{n\to\infty} 1/n \sum_{1\le i\le n}\log(X_i) = \log c \quad \text{f.s.}$$

Nun bemerken wir, dass $\log(X_1)$ fast sicher in $[0,\log(2)]$ liegt. Somit ist $\mathbb{V}\mathrm{ar}[\log(X_1)] < \infty$ und $(\log(X_i))_{i\in\mathbb{N}}$ eine u.i.v. Folge von Zufallsvariablen. Aus dem starken Gesetz der großen Zahl folgt nun

$$\frac{1}{n}\sum_{1\le i\le n}\log(X_i) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[\log(X_1)] \quad \text{f.s.}$$

Wir rechnen nun noch den Erwartungswert aus:

$$\mathbb{E}[\log(X_1)] = \int_1^2 \log(x)\,\mathrm{d}x = \left.(x\log(x)-x)\right|_1^2 = 2\log(2)-1.$$

Somit ist

$$c = \exp(2\log(2)-1).$$

Aufgabe Z8.2

Sei $\alpha > 0$. Eine Zufallsvariable X heißt *Cauchy*-verteilt mit Parameter α falls ihre Dichte bzgl. dem Lebesgue-Maß gegeben ist durch

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{\alpha^2+x^2}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass durch f_X tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert wird. Ferner seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und Cauchy-verteilt zum Parameter $\alpha > 0$, und sei $S_n = \sum_{1\le i\le n} X_i$. Zeigen Sie:

1. $n^{-1}\sum_{1\le i\le n} X_i$ ist ebenfalls Cauchy-verteilt.

2. S_n erfüllt kein Gesetz der großen Zahlen.

Lösung. Wir beginnen mit der Beobachtung, dass

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \pi^{-1}\cdot \arctan(x/\alpha)|_{-\infty}^{\infty} = 1.$$

Lemma 1. *Die Summe $X+Y$ zweier unabhängiger Cauchy-Verteilungen zu Parametern α und β ist ebenfalls Cauchy-verteilt, und zwar zum Parameter $\alpha+\beta$.*

Beweis. Für die Verteilung der Summe von Zufallsvariablen machen wir zuerst eine allgemeine Beobachtung über die Faltung: Sind f_X und f_Y die Dichten zweier Zufallsvariablen X und Y, so gilt, dass $X+Y$ die Dichte

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(y) f_Y(x-y)\,\mathrm{d}y$$

besitzt. Dies ergibt sich mit der Anwendung von Fubini aus

$$\begin{aligned} P(X+Y\le c) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{c-y} f_Y(x)\,\mathrm{d}x\right) f_X(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{c} f_Y(x-y)\,\mathrm{d}x\right) f_X(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{c} \left(\int_{\mathbb{R}} f_X(y) f_Y(x-y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Im hier betrachteten Fall gilt also

$$\begin{aligned} f_{X+Y} &= \frac{\alpha\beta}{\pi^2}\int \frac{1}{\alpha^2+(x-y)^2}\frac{1}{\beta^2+y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\alpha\beta}{\pi^2}\int \left[\frac{A(y-x)+B}{\alpha^2+(y-x)^2} + \frac{Cy+D}{\beta^2+y^2}\right]\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

wobei für die zweite Zeile der Ansatz einer Partialbruchzerlegung gemacht wurde. Diese führt zu

$$\begin{aligned} C = -A &= \frac{2x}{4x^2\beta^2+\delta^2}, \quad D = \frac{\delta}{4x^2\beta^2+\delta^2} \\ B &= \frac{2x^2-\delta}{4x^2\beta^2+\delta^2}, \end{aligned}$$

wobei $\delta = \alpha^2+x^2-\beta^2$. Nach Substitution sieht man, dass sich die Summanden mit den Termen A und C zu Null aufsummieren. Für die beiden verbleibenden Summanden erhalten wir

$$\begin{aligned} f_{X+Y} &= \frac{\beta}{\pi}\cdot\frac{2x^2-\delta}{4x^2\beta^2+\delta^2}\int \frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{\alpha^2+(y-x)^2}\,\mathrm{d}y + \frac{\alpha}{\pi}\cdot\frac{\delta}{4x^2\beta^2+\delta^2}\int\frac{\beta}{\pi}\frac{1}{\beta^2+y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\beta x^2+(\alpha-\beta)\delta}{4x^2\beta^2+\delta^2} = \ldots = \frac{\alpha+\beta}{\pi}\cdot\frac{1}{(\alpha+\beta)^2+x^2}. \end{aligned}$$

□

Die Behauptung, dass S_n Cauchy-verteilt zum Parameter $n\alpha$ ist, folgt nun einfach über Induktion. Als Konsequenz ist S_n/n Cauchy-α-verteilt (faltungsstabil) und erfüllt kein Gesetz der großen Zahlen.

Aufgabe Z8.3

Seien $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, Y, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^2$. Zeigen Sie:

$$X_n \overset{\mathcal{L}^2}{\to} X, Y_n \overset{\mathcal{L}^2}{\to} Y \implies X_nY_n \overset{\mathcal{L}^1}{\to} XY.$$

Lösung. Bezeichne für $p \geq 1$ mit $\|\cdot\|_p := \mathbb{E}[|\cdot|^p]^{1/p}$ die L^p-Halbnorm. Diese erfüllt die Dreiecksungleichung (Minkowski-Ungleichung). Daher gilt

$$\begin{aligned}\|X_nY_n - XY\|_1 = \|X_nY_n - X_nY + X_nY - XY\|_1 &\leq \|X_n(Y_n - Y)\|_1 + \|Y(X_n - X)\|_1 \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|X_n - X + X\|_2 \cdot \|Y_n - Y\|_2 + \|Y\|_2 \cdot \|X_n - X\|_2 \\ &\leq (\underbrace{\|X_n - X\|_2}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} + \underbrace{\|Y\|_2}_{<\infty}) \cdot \underbrace{\|Y_n - Y\|_2}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} + \underbrace{\|Y\|_2}_{<\infty} \cdot \underbrace{\|X_n - X\|_2}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}.\end{aligned}$$

Aufgabe Z8.4

Beweisen Sie Korollar 4.4. aus der Vorlesung richtig.
Hinweis: Eine Möglichkeit ist, die Charakterisierung von fast sicherer Konvergenz aus Ü7.7 zu benutzen.

Lösung. Wir wählen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ so, dass

$$P(|X_{n_k} - X| \geq 2^{-k}) \leq 2^{-k}.$$

Für $\varepsilon > 0$ gibt es damit ein $K \in \mathbb{N}$ mit $2^{-K} < \varepsilon$. Es gilt

$$\sum_{k\geq 1} P(|X_{n_k} - X| \geq \varepsilon) \leq K + \sum_{k>K} P(|X_{n_k} - X| \geq 2^{-k}) \leq K + \sum_{k>K} 2^{-k} < \infty.$$

Die Aussage folgt mit Lemma 4.3. Alternativ folgt die Aussage auch mit derselben Wahl von (n_k) und Übung 7.7.

Aufgabe Z8.5

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X \in \mathcal{L}^p$ für ein $p \geq 1$. Zeigen Sie

$$|X_n|^p \text{ gleichmäßig integrierbar} \Leftrightarrow |X_n - X|^p \text{ gleichmäßig integrierbar}.$$

Lösung

$\Rightarrow$ Wir definieren $\mathbb{E}[X;A] := \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A]$. Sei $N > 0$. Es gilt $(|U - V| > N \wedge |U| \geq |V| \Rightarrow |U| \geq N/2)$. Bezeichne diese Beobachtung mit $(*)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_n - X|^p; |X_n - X| > N] &\leq \mathbb{E}[|X_n - X|^p; |X_n - X| > N, |X| \geq |X_n|] \\
&\quad + \mathbb{E}[|X_n - X|^p; |X_n - X| > N, |X_n| \geq |X|] \\
&\overset{(*)}{\leq} \mathbb{E}[|X_n - X|^p; |X| \geq |X_n|, |X| \geq N/2] \\
&\quad + \mathbb{E}[|X_n - X|^p; |X_n| \geq |X|, |X_n| \geq N/2] \\
&\leq 2^p \underbrace{\mathbb{E}[|X|^p; |X| \geq N/2]}_{\xrightarrow{N\to\infty} 0, \text{ da } X \in \mathcal{L}^p} + 2^p \underbrace{\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|^p; |X_n| \geq N/2]}_{\xrightarrow{N\to\infty} 0, \text{ da } |X_n|^p \text{ glm. integrierbar}}
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Analog wie die andere Richtung mit der Beobachtung $|X_n|^p = |(X_n - X) + X|^p$.

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü8.6

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{E}[X_1] = \infty$ und sei $S_n = \sum_{1\leq i\leq n} X_i$. Sei $\alpha \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie:

$$P(|S_n| > \alpha n \text{ unendlich oft}) = 1.$$

Lösung. Sei $\alpha \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} P(|X_n| > 2\alpha n) &= \sum_{n\geq 1} P(|X_1| > 2\alpha n) \\
&\geq \int_0^\infty P(|X_1|/2\alpha > x)\,\mathrm{d}x - 1 = \mathbb{E}[|X_1/2\alpha|] - 1 = \infty,
\end{aligned}$$

also gibt es nach Borel-Cantelli fast sicher unendliche viele $n \in \mathbb{N}$, sodass $|X_n| > 2\alpha n$. Wir beobachten weiterhin, dass

$$\max\{|S_n|, |S_{n-1}|\} \geq |X_n|/2,$$

weshalb

$$P(\limsup_{n\to\infty} |S_n|/n > 2\alpha/2) = 1,$$

was zu zeigen war.

Aufgabe Ü8.7

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig mit Erwartungswert 0 und $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$. Zeigen Sie: $S_n = \sum_{1\leq i\leq n} X_i$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit.

Lösung. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Mit Chebyshev und der Unabhängigkeit der X_n gilt

$$\begin{aligned}
P(|S_\infty - S_n| \geq \varepsilon) = P(|\sum_{m>n} X_m| \geq \varepsilon) &\leq \varepsilon^{-2} \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\sum_{m>n} X_m\right] \\
&= \varepsilon^{-2} \sum_{m>n} \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_m] = \varepsilon^{-2} \sum_{m\geq n} \mathbb{E}[X_m^2] \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe Ü8.8

Seien $X_2, X_3, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n \log n}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}.$$

Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$ in Wahrscheinlichkeit, aber nicht fast sicher gegen 0 konvergiert.

Lösung. Mit $\mathbb{E}[S_n/n] = 0$ (wobei $S_n = \sum_{i=2}^n X_i$) und beliebigem $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} P(|S_n/n| > \varepsilon) &\leq \varepsilon^{-2} \mathbb{V}\mathrm{ar}[S_n/n] = (\varepsilon n)^{-2} \sum_{i=2}^n \mathbb{E}[X_i^2] = (\varepsilon n)^{-2} \sum_{i=2}^n \frac{i}{\log i} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2 \log n} \xrightarrow{n \to \infty} 0, \end{aligned}$$

also $S_n \xrightarrow{P} 0$. Andererseits gilt jedoch

$$\sum_{n \geq 2} P(|X_n| \geq n) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \log n} = \infty.$$

Die Divergenz lässt sich z.B. durch $\int (x \log x)^{-1} \, \mathrm{d}x = \log \log x$ einsehen. Nach Borel-Cantelli bedeutet dies jedoch, dass $|S_n - S_{n-1}| = |X_n| \geq n$ für unendlich viele n. Es folgt, dass S_n/n fast sicher nicht konvergiert.

Aufgabe Ü8.9

Das Eintreten von Naturkatastrophen zu Zeiten $T_1, T_2, \ldots$ werde modelliert als $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$, wobei die X_i unabhängige und identisch verteilte positive Zufallsvariablen seien. Sei $N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$ die Anzahl der bis zum Zeitpunkt t eingetretenen Katastrophen.
Beweisen Sie: Wenn $\mathbb{E}[X_1] < \infty$, dann gilt $N(t)/t \xrightarrow{t \to \infty} 1/\mathbb{E}[X_1]$ fast sicher.

Lösung. Wir beobachten, dass
$(*)$ $N(t) < n \iff T_n > t$,
$(**)$ $T_{N(t)} \leq t < T_{N(t)+1}$.
Es gilt $\mathbb{E}[T_n] = n\mathbb{E}[X_1] < \infty$ und daher $P(T_n > t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$. Also folgt mit $(*)$, dass

$$P(N(t) < n) \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

und als Konsequenz, dass $N(t) \xrightarrow{\text{f.s.}} \infty$ für $t \to \infty$. Unter Anwendung von $(**)$ gilt

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot (1 + N(t)^{-1}).$$

Nach dem starken GGZ gilt $T_n/n \xrightarrow{\text{f.s.}} \mathbb{E}[X_1]$ für $n \to \infty$ und daher $t/N(t) \xrightarrow{\text{f.s.}} \mathbb{E}[X_1]$ für $t \to \infty$.

Aufgabe Ü8.10

Seien $X, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Zufallsvariablen mit $|X_n| \leq |X|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $X \in \mathcal{L}^1$. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig integrierbar ist.

Lösung. Für $n, N \in \mathbb{N}$ ist $\{|X_n| > N\} \subseteq \{|X| > N\}$ und daher

$$\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>N\}}] \leq \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{\{|X|>N\}}] \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Da diese Schranke uniform in n ist, gilt sie auch für das Supremum, woraus die gleichgradige Integrierbarkeit folgt.