Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 8

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z8.1

Sein $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, auf $[1,2]$ gleichverteilter Zufallsvariablen. Bestimmen Sie den f.s.-Grenzwert von

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Aufgabe Z8.2

Sei $\alpha > 0$. Eine Zufallsvariable X heißt *Cauchy*-verteilt mit Parameter α falls ihre Dichte bzgl. dem Lebesgue Maß gegeben ist durch

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{\alpha^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass durch f_X tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert wird. Ferner seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und Cauchy-verteilt zum Parameter $\alpha > 0$, und sei $S_n = \sum_{1\le i\le n} X_i$. Zeigen Sie:

1. $n^{-1}\sum_{1\le i\le n} X_i$ ist ebenfalls Cauchy verteilt.
2. S_n erfüllt kein Gesetz der großen Zahlen.

Aufgabe Z8.3

Seien $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, Y, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^2$. Zeigen Sie:

$$X_n \overset{\mathcal{L}^2}{\to} X, Y_n \overset{\mathcal{L}^2}{\to} Y \implies X_nY_n \overset{\mathcal{L}^1}{\to} XY.$$

Aufgabe Z8.4

Beweisen Sie Korollar 4.4. aus der Vorlesung richtig.
Hinweis: Eine Möglichkeit ist, die Charakterisierung von fast sicherer Konvergenz aus Ü7.7 zu benutzen.

Aufgabe Z8.5

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X \in \mathcal{L}^p$ für ein $p \ge 1$. Zeigen Sie

$$|X_n|^p \text{ gleichmäßig integrierbar} \Leftrightarrow |X_n - X|^p \text{ gleichmäßig integrierbar}.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü8.6

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{E}[X_1] = \infty$ und sei $S_n = \sum_{1\leq i\leq n} X_i$. Sei $\alpha \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie:

$$P(|S_n| > \alpha n \text{ unendlich oft}) = 1.$$

Aufgabe Ü8.7

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig mit Erwartungswert 0 und $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$. Zeigen Sie: $S_n = \sum_{1\leq i\leq n} X_i$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe Ü8.8

Seien $X_2, X_3, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n\log n}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}.$$

Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} X_i$ in Wahrscheinlichkeit, aber nicht fast sicher gegen 0 konvergiert.

Aufgabe Ü8.9

Das Eintreten von Naturkatastrophen zu Zeiten $T_1, T_2, \ldots$ werde modelliert als $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, wobei die X_i unabhängige und identische verteilte positive Zufallsvariablen seien. Sei $N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$ die Anzahl der bis zum Zeitpunkt t eingetretenen Katastrophen.
Beweisen Sie: Wenn $\mathbb{E}[X_1] < \infty$, dann gilt $N(t)/t \xrightarrow{t\to\infty} 1/\mathbb{E}[X_1]$ fast sicher.

Aufgabe Ü8.10

Seien $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen mit $|X_n| \leq |X|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $X \in \mathcal{L}^1$. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig integrierbar ist.