Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 7: Lösungen

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z7.1

Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1]=0$. Weiter sei $\beta\in(1,2)$. Zeigen Sie, dass

$$n^{-\frac{1}{\beta}}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{f.s.} 0 \implies \mathbb{E}[|X_1|^\beta]<\infty.$$

Hinweis: Warum genügt es, $\sum_{n=1}^\infty P(|X_n|>n^{\frac{1}{\beta}})<\infty$ zu zeigen?

Lösung. Es sei Y eine Zufallsvariable mit Werten in $[0,\infty]$. Mit Ü4.8(b) gilt

$$\mathbb{E}[Y]=\int_0^\infty P(Y>t)dt \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^\infty\int_n^{n+1}P(Y>t)dt$$
$$\begin{cases} \leq 1+\sum_{n=1}^\infty\int_n^{n+1}\underbrace{P(Y>t)}_{\leq P(Y\geq n)}dt \leq 1+\sum_{n=1}^\infty P(Y\geq n) \\ \overset{(2)}{\geq} \sum_{n=0}^\infty P(Y\geq n+1)=\sum_{n=1}^\infty P(Y\geq n). \end{cases}$$

In (1) wurde der Satz von der dominierten Konvergenz verwendet, in (2) die Tatsache, dass für $t\in[n,n+1)$ gilt $P(Y>t)\geq P(Y\geq n+1)$. Aufgrund der identischen Verteilungsannahme und dieser Vorüberlegung gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty P(|X_n|\geq n^{\frac{1}{\beta}})<\infty &\iff \sum_{n=1}^\infty P(|X_1|\geq n^{\frac{1}{\beta}})<\infty \\ &\iff \sum_{n=1}^\infty P(|X_1|^\beta\geq n)<\infty \\ &\iff \mathbb{E}[|X_1|^\beta]<\infty,\end{aligned}$$

Es genügt also,

$$\sum_{n=1}^\infty P(|X_n|\geq n^{\frac{1}{\beta}})<\infty \tag{$*$}$$

zu zeigen. Hierfür definieren wir $S_n:=\sum_{k=1}^n X_k$ für $k\in\mathbb{N}$ und beobachten

$$\frac{X_n}{n^{\frac{1}{\beta}}}=\frac{S_n}{n^{\frac{1}{\beta}}}-\frac{(n-1)^{\frac{1}{\beta}}}{n^{\frac{1}{\beta}}}\frac{S_{n-1}}{(n-1)^{\frac{1}{\beta}}}.$$

Da

$$\frac{(n-1)^{\frac{1}{\beta}}}{n^{\frac{1}{\beta}}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

und die beiden anderen Ausdrücke für $n \to \infty$ f.s. gegen 0 konvergieren, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{n^{\frac{1}{\beta}}} = 0 \text{ f.s.}$$

Insbesondere gilt damit $P(\limsup_n A_n) = 0$ für $A_n = \{|X_n| \geq n^{\frac{1}{\beta}}\}$. Nehmen wir nun an, $(*)$ sei nicht erfüllt, so folgt mit dem Borel-Cantelli-Lemma direkt $P(\limsup_n A_n) = 1$, ein Widerspruch.

Aufgabe Z7.2

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger mit Parameter 1 exponentialverteilter Zufallsvariablen. Zeigen Sie für alle $a < 1$, dass $n^a \min_{k\leq n} X_k \xrightarrow{P} 0$.
(*Hinweis*: Markov-Ungleichung.)

Lösung. Definiere $M_n := \min_{k\leq n} X_k$.
Behauptung: M_n ist zum Parameter n exponentialverteilt.
Dies prüft man am besten durch Berechnung der Verteilungsfunktion. Sei $c > 0$, dann ist

$$\begin{aligned} P(M_n \leq c) &= 1 - P(M_n > c) \\ &= 1 - P(X_1 > c, ..., X_n > c) \\ &= 1 - (e^{-c})^n \\ &= 1 - e^{-nc} \\ &= \mathrm{Exp}(n)((-\infty, c]). \end{aligned}$$

Aus dieser Behauptung folgern wir $\mathbb{E}[M_n] = 1/n$. Da M_n nichtnegativ ist, lässt sich die Markov-Ungleichung folgendermaßen anwenden:

$$P(n^a M_n \geq \varepsilon) \leq \frac{n^{a-1}}{\varepsilon} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

wobei $a < 1$ verwendet wurde. Wir haben die gewünschte stochastische Konvergenz gezeigt.

Aufgabe Z7.3

Seien $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen und $1 \leq q \leq p$. Zeigen Sie: Wenn $X_n \xrightarrow{L^p} X$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^q] = \mathbb{E}[|X|^q]$.

Lösung. Wir zeigen, dass die Aussage für p gilt. Mit Satz 4.5(1) folgt die Aussage auch für alle $q \leq p$.
Wir erinnern uns an die umgekehrte Dreiecksgleichung

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\|$$

für eine (Halb-)Norm $\|\cdot\|$. Angewandt auf die L^p-Norm erhalten wir

$$0 \leq \left| \mathbb{E}[|X_n|^p]^{1/p} - \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} \right| \leq \mathbb{E}[|X_n - X|^p]^{1/p} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

woraus $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^p]^{1/p} = \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}$ und damit $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^p] = \mathbb{E}[|X|^p]$ folgt.

Lösung 2. Es sei $1 \leq q \leq p$. Im Falle $p \neq q$ sei r der Hölder-konjugierte Index zu p und q, d.h. $1/r + 1/p = 1/q$ oder $r = pq/(p-q)$. Gemäß der Hölderungleichung ist

$$\|X_n - X\|_q \leq \|X_n - X\|_p \underbrace{\|\mathbb{1}_\Omega\|_r}_{=1} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Weiterhin gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\left|\mathbb{E}[|X_n|^q]^{1/q} - \mathbb{E}[|X|^q]^{1/q}\right| \leq \|X_n - X\|_q \to 0.$$

Die Behauptung folgt aus der Stetigkeit der Abbildung $s \mapsto s^q$

Aufgabe Z7.4

1. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie:
$$X_n \xrightarrow{P} X \iff \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X| \wedge 1] = 0.$$
2. Wir definieren $L^0 := \{[X] \mid X : \Omega \to \mathbb{R}\ \mathcal{A}\text{-messbar}\}$, wobei $[X]$ die Äquivalenzklasse aller Zufallsvariablen $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ bezeichne, für welche $P(X = Y) = 1$ gilt. Zeigen Sie, dass
$$d : L^0 \times L^0 \to [0,1],\ ([X],[Y]) \mapsto \mathbb{E}[|X - Y| \wedge 1],$$
wohldefiniert ist und eine Metrik auf L^0 definiert.

Lösung.

1. $\Rightarrow$ Es gilt $(0 < \varepsilon < 1)$
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[1 \wedge |X_n - X|] &= \int_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}} \min\{1, |X_n - X|\}\, \mathrm{d}P + \int_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} \min\{1, |X_n - X|\}\, \mathrm{d}P \\ &\leq \min\{1, \varepsilon\} + P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} \varepsilon.\end{aligned}$$
Das Geforderte folgt für $\varepsilon \to 0$.
$\Leftarrow$ Für $0 < \varepsilon < 1$ gilt
$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq P(\min\{|X_n - X|, 1\} > \varepsilon) \to 0$$
mit der Markov-Ungleichung und $n \to \infty$.
2. Es seien $X', X'' \in [X]$ und $Y', Y'' \in [Y]$, d.h. $P(X' = X'', Y' = Y'') = 1$. Somit gilt
$$\mathbb{E}[|X' - Y'| \wedge 1] = \mathbb{E}[(|X'' - Y''| \wedge 1)\mathbb{1}_{\{X' = X'', Y' = Y''\}}] = \mathbb{E}[|X'' - Y''| \wedge 1].$$
Der Wert von d hängt also nicht von der Wahl der Repräsentanten in $[X]$ oder $[Y]$ ab und ist demnach wohldefiniert. Bemerke, dass
$$d([X],[Y]) = 0 \iff X - Y = 0\ P\text{-f.s.} \iff [X] = [Y],$$
was die Definitheit der Metrik zeigt. Symmetrie ist klar. Für die Dreiecksungleichung bemerken wir zunächst, dass für $a, b \geq 0$ gilt
$$(a+b) \wedge 1 = \begin{cases} a + b = a \wedge 1 + b \wedge 1, & a + b \leq 1 \\ = 1 \leq a \wedge 1 + b \wedge 1, & a + b > 1 \end{cases} \leq a \wedge 1 + b \wedge 1.$$
Sind X, Y, Z Zufallsvariablen, so folgern wir aufgrund der Monotonie von $[0, \infty) \ni s \mapsto s \wedge 1$
$$d([X],[Z]) \leq \mathbb{E}\left[(|X - Y| + |Y - Z|) \wedge 1\right] \leq \mathbb{E}[|X - Y| \wedge 1] + \mathbb{E}[|Y - Z| \wedge 1] = d([X],[Y]) + d([Y],[Z]).$$
Das ist die Dreiecksungleichung.

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü7.5

Konstruieren Sie Zufallsvariablen X und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum, sodass $X_n \xrightarrow{P} X$ und entweder

1. $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$ oder
2. $\mathbb{E}[X_n]$ konvergiert, aber nicht gegen $\mathbb{E}[X]$ oder
3. $\mathbb{E}[X_n]$ konvergiert nicht.

Lösung. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge, die für die jeweiligen Teilaufgaben noch spezifiziert wird. Weiterhin sei $X = 0$ und $X_n \in \{0, a_n\}$ mit $P(X_n = a_n) = 1/n$. Für $\varepsilon > 0$ ist dann $P(|X_n - X| > \varepsilon) \le P(X_n = a_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Außerdem gilt $\mathbb{E}[X_n] = a_n/n$. Wählen wir nun (1.) $a_n = 1$, (2.) $a_n = n$ bzw. (3.) $a_n = n^2$, so erhalten wir die gewünschten Verhalten.

Aufgabe Ü7.6

Seien $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

1. $X_n \xrightarrow{n\to\infty} X$ f.s. $\iff$ für alle $\varepsilon > 0$: $P(|X_k - X| > \varepsilon$ für unendlich viele $k) = 0$.
2. Es gibt ein $q > 0$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_k - X|^q] < \infty \implies X_n \xrightarrow{f.s.} X$.

Lösung.

1. Es ist

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{n\to\infty} X \text{ f.s.} &\Leftrightarrow P(\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N : |X_n - X| \le \varepsilon) = 1 \\ &\Leftrightarrow P(\exists\varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \ge N : |X_n - X| > \varepsilon) = 0 \\ &\Leftrightarrow P(\exists\varepsilon > 0 : |X_k - X| > \varepsilon \text{ für unendlich viele } k) = 0 \\ &\Leftrightarrow P\left(\bigcup_{0<\varepsilon\in\mathbb{Q}} \{|X_k - X| > \varepsilon \text{ für unendlich viele } k\}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : P(|X_k - X| > \varepsilon \text{ für unendlich viele } k) = 0. \end{aligned}$$

2. Mit monotoner Konvergenz gilt $\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{\infty} |X_k - X|^q] < \infty$. Hieraus folgt, dass $\{\omega : \sum_{k=1}^{\infty} |X_k - X|^q = \infty\}$ eine Nullmenge sein muss (da sonst der Erwartungswert dieser nichtnegativen ZV nicht konvergiert). Doch dies impliziert $\sum_{k=1}^{\infty} |X_k - X|^q < \infty$ fast sicher.

   Es folgt direkt, dass $|X_k - X|^q \xrightarrow{k\to\infty} 0$ fast sicher und damit die Behauptung.

Aufgabe Ü7.7

Zeigen Sie: $X_n \xrightarrow{f.s.} X \iff \sup_{k\ge n} |X_k - X| \xrightarrow{P} 0$.

Lösung. Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$A_n^\varepsilon := \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}, \qquad A^\varepsilon := \limsup_{n\to\infty} A_n^\varepsilon.$$

Dann gilt $\{\omega : X_n(\omega) \not\to X(\omega)\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A^{\frac{1}{m}}$ und weiter

$$\begin{aligned}
P(X_n \not\to X) = 0 \iff P\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A^{\frac{1}{m}}\right) = 0 &\overset{\sigma\text{-Stetigkeit}}{\iff} \forall m \in \mathbb{N} : P\left(A^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \\
&\iff \forall m \in \mathbb{N} : P\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A_n^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \\
&\overset{\sigma\text{-Stetigkeit}}{\iff} \forall m \in \mathbb{N} : \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcup_{n\geq k} A_n^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \\
&\iff \forall m \in \mathbb{N} : \lim_{k\to\infty} P\left(\sup_{n\geq k} |X_n - X| > \frac{1}{m}\right) = 0 \\
&\iff \sup_{n\geq k} |X_n - X| \overset{P}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe Ü7.8

Sei X_n monoton in n und $X_n \overset{P}{\to} X$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $X_n \overset{f.s.}{\to} X$.

Lösung. Die Aussage ist wahr. Nach Korollar 4.4 besitzt X_n eine fast sicher gegen X konvergente Teilfolge. Da jedoch eine monotone Folge mit konvergenter Teilfolge konvergiert, muss ganz X_n fast sicher gegen X konvergieren.

Aufgabe Ü7.9

Seien $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen mit $X_n \overset{P}{\to} X$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass $f(X_n) \overset{P}{\to} f(X)$.

Lösung. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für $\delta \geq 0$ definieren wir

$$B_\delta := \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon\},$$

die Menge der Punkte x, in deren δ-Nachbarschaft mindestens ein Punkt liegt, der unter f mehr als ε entfernt liegt. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt $B_\delta \xrightarrow{\delta\to 0} \emptyset$. Mit der Inklusion

$$\{|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon\} \subseteq \{|X - X_n| \geq \delta\} \cup \{X \in B_\delta\}$$

folgt

$$P(|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| \geq \delta) + P(X \in B_\delta) \xrightarrow{n\to\infty, \delta\to 0} 0.$$