Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 7

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z7.1

Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$. Weiter sei $\beta \in (1, 2)$. Zeigen Sie, dass

$$n^{-\frac{1}{\beta}} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{f.s.} 0 \implies \mathbb{E}[|X_1|^\beta] < \infty.$$

Hinweis: Warum genügt es, $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > n^{\frac{1}{\beta}}) < \infty$ zu zeigen?

Aufgabe Z7.2

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger mit Parameter 1 exponentialverteilter Zufallsvariablen. Zeigen Sie für alle $a < 1$, dass $n^a \min_{k\leq n} X_k \xrightarrow{P} 0$.
(*Hinweis*: Markov-Ungleichung.)

Aufgabe Z7.3

Seien $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen und $1 \leq q \leq p$. Zeigen Sie: Wenn $X_n \xrightarrow{L^p} X$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^q] = \mathbb{E}[|X|^q]$.

Aufgabe Z7.4

1. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie:

$$X_n \xrightarrow{P} X \iff \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X| \wedge 1] = 0.$$

2. Wir definieren $L^0 := \{[X] \mid X : \Omega \to \mathbb{R} \ \mathcal{A}\text{-messbar}\}$, wobei $[X]$ die Äquivalenzklasse aller Zufallsvariablen $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ bezeichne, für welche $P(X = Y) = 1$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$d : L^0 \times L^0 \to [0, 1], \ ([X], [Y]) \mapsto \mathbb{E}[|X - Y| \wedge 1],$$

wohldefiniert ist und eine Metrik auf L^0 definiert.

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü7.5

Konstruieren Sie Zufallsvariablen X und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum, sodass $X_n \stackrel{P}{\to} X$ und entweder

1. $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$ oder
2. $\mathbb{E}[X_n]$ konvergiert, aber nicht gegen $\mathbb{E}[X]$ oder
3. $\mathbb{E}[X_n]$ konvergiert nicht.

Aufgabe Ü7.6

Seien $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

1. $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ f.s. $\iff$ für alle $\varepsilon > 0$: $P(|X_k - X| > \varepsilon$ für unendlich viele $k) = 0$.
2. Es gibt ein $q > 0$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_k - X|^q] < \infty \implies X_n \xrightarrow{f.s.} X$.

Aufgabe Ü7.7

Zeigen Sie: $X_n \stackrel{f.s.}{\to} X \iff \sup_{k\geq n} |X_k - X| \stackrel{P}{\to} 0$.

Aufgabe Ü7.8

Sei X_n monoton in n und $X_n \stackrel{P}{\to} X$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $X_n \stackrel{f.s.}{\to} X$.

Aufgabe Ü7.9

Seien $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen mit $X_n \stackrel{P}{\to} X$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass $f(X_n) \stackrel{P}{\to} f(X)$.