Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 6: Lösungen

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z6.1

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P(X_n = 1) = 1/2 = P(X_n = -1)$ und betrachten Sie das Ereignis

$$K = \left\{\omega \in \Omega : \sum_{n\geq 1} \frac{X_n}{n} \text{ konvergiert}\right\}.$$

1. Sei $Y_N = \sum_{2^N \leq n < 2^{N+1}} X_n/n$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[Y_N], \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_N]$ und folgern Sie, dass
$$P(|Y_N| \geq 1/N^2) \leq N^4 2^{-N}.$$
2. Zeigen Sie, dass $P(K) = 1$.

Lösung.

1. Es ist $\mathbb{E}[X_N] = 0 = \mathbb{E}[Y_N]$. Weiter ist $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_n/n] = n^{-2}$ und daher
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_N] = \sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1} n^{-2} \leq \sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1} 2^{-2N} \leq 2^{-N}.$$
Für das Ereignis $A_N := \{|Y_N| \geq N^{-2}\}$ gilt daher mit der Chebyshev-Ungleichung $P(A_N) \leq N^4 2^{-N}$, wie behauptet.
2. Sei $\alpha_0 = 1$ und
$$\alpha_N = (1 + N^{-1/2})\alpha_{N-1}, \quad N \in \mathbb{N}.$$
Insbesondere ist mit $1 + x \geq e^{x/2}$ für $x \in [0, 1]$
$$\alpha_N \geq (1 + N^{-1/2})^N \geq e^{\sqrt{N}/2}.$$
Definiere die Intervalle $I_N = [\alpha_N, \alpha_{N+1}) \cap \mathbb{N}$ und setze
$$Z_N = \sum_{n\in I_N} \frac{X_n}{n}, \quad N \in \mathbb{N}_0.$$
Wie in Teilaufgabe 1 erhalten wir dass
$$z_N := P(|Z_N| \geq N^{-2}) \leq N^4 \mathbb{V}\mathrm{ar}[Z_N] \leq N^4 |I_N| \alpha_N^{-2} \leq N^4 \frac{\alpha_{N+1}}{\alpha_N^2} \leq 2N^4 e^{-\sqrt{N}/2}.$$

Damit ist $\sum_{N\geq 1} z_N < \infty$ und mit Borel-Cantelli

$$P(|Z_N| \leq N^{-2} \text{ für alle bis auf endlich viele } N) = 1.$$

Sei nun $\omega \in \Omega$ so dass $|Z_N| \leq N^{-2}$ für alle bis auf endlich viele N. Sei $M = \max\{N : |Z_N| \geq N^{-2}\} < \infty$ und schreibe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{X_n}{n} = B + T := \sum_{N=1}^{M} Z_N + \sum_{N>M} Z_N$$

Beachte, dass B eine endliche Summe ist. Wir zeigen, dass T konvergiert, woraus dann die Behauptung (also $P(K) = 1$) direkt folgt. Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$n^+ = \min\{\lfloor \alpha_N \rfloor : n < \alpha_N\} \quad \text{und} \quad n^- = \max\{\lceil \alpha_N \rceil : n \geq \alpha_N\}.$$

Schreibe $S_\ell = \sum_{1\leq n\leq \ell} X_\ell/\ell$. Für $\varepsilon > 0$ gilt für $\ell > k \geq \alpha_{M+1}$

$$|S_\ell - S_k| \leq |S_{\ell^+} - S_{k^-}| + |S_{\ell^+} - S_\ell| + |S_{k^-} - S_k|$$

Somit gibt es $L, K \geq M$ mit

$$|S_\ell - S_k| \leq \sum_{N\geq K} |Z_N| + \sum_{n\in I_L} n^{-1} + \sum_{n\in I_K} n^{-1}.$$

Aus der Annahme folgt, dass die erste Summe $\leq K^{-1}$ ist. Ferner ist die zweite Summe höchstens

$$|I_L|\alpha_L^{-1} \leq (\alpha_{L+1} - \alpha_L)\alpha_L^{-1} \leq L^{-1/2}.$$

Insgesamt ist $|S_\ell - S_k| \leq K^{-1} + L^{-1/2} + K^{-1/2}$ und somit ist S_ℓ eine Cauchy Folge.

Aufgabe Z6.2

Sei S_n die einfache Irrfahrt nach n Schritten, also $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ mit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig identisch verteilt mit $P(X_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass

$$P(\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty) = P(\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty).$$

Lösung. Es ist

$$\left\{\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty\right\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left\{\limsup_{n\to\infty} S_n > m\right\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} \{\sup_{k\geq n} S_k\} > m\right\}$$
$$= \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq\mathbb{N}_0} \{\max_{0\leq i\leq k} S_{n+i} \geq m\}.$$

Analog zeigt man $\{\liminf_{n\to\infty} S_n = \infty\} = \cap_m \cap_n \cup_{k\in\mathbb{N}_0} \{\min_{0\leq i\leq k} S_{n+i} \leq -m\}$. Aufgrund von Symmetrie gilt für festes m, n, k, dass

$$P\left(\max_{0\leq i\leq k} S_{n+i} \geq m\right) = P\left(\min_{0\leq i\leq k} S_{n+i} \leq -m\right),$$

mit der σ-Stetigkeit für P folgt das Resultat.

Aufgabe Z6.3

Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \mathcal{U}_{(a,b)}$. Sei $M_n = \max_{i\in[n]} X_i$. Zeigen Sie, dass $M_n \xrightarrow{\text{f.s.}} b$.

Lösung. Wir beobachten zuerst, dass M_n monoton steigend ist, womit es nach Ü7.8 genügt, Konvergenz in Wahrscheinlichkeit zu zeigen. Mit Z5.2 gilt jedoch für beliebiges $0 < \varepsilon < b-a$, dass

$$P(M_n \leq b-\varepsilon) = \left(\frac{b-a-\varepsilon}{b-a}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Aufgabe Z6.4

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, wobei Ω abzählbar sei und $\mathcal{A} = 2^\Omega$. Seien weiterhin $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \Longleftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X \quad (n \to \infty).$$

Lösung. Es sei $\bar{\Omega} := \{w_i, i \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Punkte mit $P(\omega_i) > 0$. Wir behaupten zuerst, dass $X_n(\omega_i) \xrightarrow{n\to\infty} X(\omega_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Sei hierfür $\varepsilon > 0$ und $i \in \mathbb{N}$. Definieren wir $A_\varepsilon := \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}$, so wissen wir aufgrund der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, $P(A_\varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Insbesondere existiert damit $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$P(A_\varepsilon) < P(\{\omega_i\})$$

für alle $n \geq N$. Insbesondere ist damit $\omega_i \notin A_\varepsilon$, also $|X_n(\omega_i) - X(\omega_i)| < \varepsilon$. Doch damit

$$P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \xrightarrow{n\to\infty} 0\}) \geq P(\bar{\Omega}) = 1.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü6.5

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$P(X_n > x) = e^{-x} \quad \forall x \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1\right) = 1.$$

Lösung. Nach Angabe gilt für $\varepsilon \in (0,1)$, dass

$$P(X_n > (1\pm\varepsilon)\log n) = n^{-(1\pm\varepsilon)}.$$

Also ist

$$\sum_{n\geq 1}(P(X_n > (1\pm\varepsilon)\log n) = \sum_{n\geq 1} n^{-(1\pm\varepsilon)} \begin{cases} < \infty & \text{für } + \\ = \infty & \text{für } - . \end{cases}$$

Nach den beiden Borel-Cantelli-Lemmata folgt also

$$1-\varepsilon \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \leq 1+\varepsilon$$

fast sicher. Das Ergebnis folgt für $\varepsilon \searrow 0$.

Aufgabe Ü6.6

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $\mathcal{T}$ die von einer Folge an unabhängigen Zufallsvariablen erzeugte asymptotische σ-Algebra. Sei X eine Zufallsvariable, die bzgl. $\mathcal{T}$ messbar ist. Zeigen Sie, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $P(X = c) = 1$.

Lösung. Nach dem Kolmogorov'schen 0-1-Gesetz ist $P(X \in A) \in \{0,1\}$ für alle Borel-Mengen A. Setze

$$b = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \in (-\infty, x]) = 1, \quad a = \sup\{x \in \mathbb{R} : P(X \in [x, \infty)) = 1.$$

Wir behaupten, dass $c = b = a$: Nehme für einen Widerspruch an, dass $a < b$ (es gilt $a \leq b$ nach Wahl von a, b). Wähle $a < m < b$. Dann muss entweder $P(X \in [a, m]) = 1$ oder $P(X \in [m, b]) = 1$. In beiden Fällen erhalten wir ein Widerspruch dazu, wie a bzw. b definiert waren.

Aufgabe Ü6.7

Bestimmen Sie eine Zufallsvariable X, so dass $n^{-1}X_n \xrightarrow{P} X$, wobei X_n Poisson-verteilt zum Parameter n, $n \in \mathbb{N}$, ist.

Lösung. Es ist $\mathbb{E}[X_n/n] = 1$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_n/n] = n^{-1}$ (siehe Aufgabe E1.5). Mit der Chebyshev-Ungleichung gilt also

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - 1\right| \geq n^{-1/3}\right) \leq n^{2/3}n^{-1} = n^{-1/3} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

womit $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} 1$.

Aufgabe Ü6.8

Sind folgende Mengen in der von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugten asymptotischen σ-Algebra?

(a) $\{\limsup_{n\to\infty} X_n = c\}$

(b) $\{\limsup_{n\to\infty} X_n < \infty\}$

(c) $\{\lim_{n\to\infty} X_n \text{ existiert}\}$

(d) $\{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n X_k \text{ existiert}\}$

(e) $\{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n X_k = c\}$

(f) $\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = c\}$

Lösung. Es gilt (a) ja, (b) ja, (c) ja, (d) ja, (e) nein, (f) ja.