Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 6

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Zentralübungsaufgaben

Aufgabe Z6.1

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P(X_n = 1) = 1/2 = P(X_n = -1)$ und betrachten Sie das Ereignis

$$K = \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{n\geq 1} \frac{X_n}{n} \text{ konvergiert} \right\}.$$

1. Sei $Y_N = \sum_{2^N \leq n < 2^{N+1}} X_n/n$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[Y_N], \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_N]$ und folgern Sie, dass

$$P(|Y_N| \geq 1/N^2) \leq N^4 2^{-N}.$$

2. Zeigen Sie, dass $P(K) = 1$.

Aufgabe Z6.2

Sei S_n die einfache Irrfahrt nach n Schritten, also $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ mit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig identisch verteilt mit $P(X_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass

$$P(\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty) = P(\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty).$$

Aufgabe Z6.3

Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \mathcal{U}_{(a,b)}$. Sei $M_n = \max_{i\in[n]} X_i$. Zeigen Sie, dass $M_n \xrightarrow{\text{f.s.}} b$.

Aufgabe Z6.4

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, wobei Ω abzählbar sei und $\mathcal{A} = 2^\Omega$. Seien weiterhin $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \Longleftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X \quad (n \to \infty).$$

Übungsaufgaben

Aufgabe Ü6.5

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$P(X_n > x) = e^{-x} \quad \forall x \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1\right) = 1.$$

Aufgabe Ü6.6

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $\mathcal{T}$ die von einer Folge an unabhängigen Zufallsvariablen erzeugte asymptotische σ-Algebra. Sei X eine Zufallsvariable, die bzgl. $\mathcal{T}$ messbar ist. Zeigen Sie, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $P(X = c) = 1$.

Aufgabe Ü6.7

Bestimmen Sie eine Zufallsvariable X, so dass $n^{-1}X_n \xrightarrow{P} X$, wobei X_n Poisson-verteilt zum Parameter n, $n \in \mathbb{N}$, ist.

Aufgabe Ü6.8

Sind folgende Mengen in der von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugten asymptotischen σ-Algebra?

(a) $\{\limsup_{n\to\infty} X_n = c\}$

(b) $\{\limsup_{n\to\infty} X_n < \infty\}$

(c) $\{\lim_{n\to\infty} X_n$ existiert$\}$

(d) $\{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} X_k$ existiert$\}$

(e) $\{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} X_k = c\}$

(f) $\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = c\}$